

# 第 4 章

## 第 2 高調波発生

黒田和男

### 1 結合波方程式

第 2 高調波発生過程を、結合波方程式を立てて論じよう。1 に示すように、非線形光学媒質に周波数  $\omega$  の基本波を入射すると、2 倍波（第 2 高調波）が発生する。基本波と 2 倍波は平行して  $z$  軸方向に進む平行配置にあるとし、それぞれの複素振幅を  $F_1, F_2$  とする。結合波方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dF_1}{dz} &= -\frac{1}{2}\alpha_1 F_1 + \frac{i\omega d_{eff}}{cn_1} F_1^* F_2 e^{i\Delta k z} \\ \frac{dF_2}{dz} &= -\frac{1}{2}\alpha_2 F_2 + \frac{i\omega d_{eff}}{cn_2} F_1^2 e^{-i\Delta k z}\end{aligned}\quad (1)$$

となる。ここで、 $n_1, n_2$  はそれぞれ基本波および 2 倍波に対する屈折率、 $\alpha_1, \alpha_2$  は吸収係数である。有効非線形感受率  $d_{eff}$  と波数の不整合量  $\Delta k$  は

$$d_{eff} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_2 \cdot \chi^{(2)}(\omega, \omega) : \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \quad (2)$$

$$\Delta k = k_2 - 2k_1 \quad (3)$$

で与えられる。ただし、有効非線形感受率は実数であるとした。

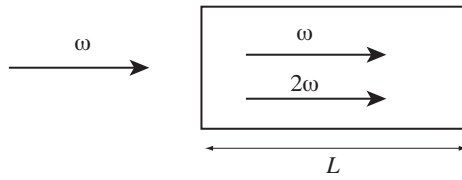


図 1 第 2 高調波発生

変換効率が低いときは、基本波の振幅  $F_1$  の変化は無視でき、定数としてよい。さらに、吸収も無視できるとする。入射面で 2 倍波の振幅は零であることを用い、結合波方程式 1 の第 2 式を結晶長  $L$  にわたって積分すると

$$F_2(L) = \frac{\omega d_{eff} F_1^2}{cn_2 \Delta k} (1 - e^{-i\Delta k L}) \quad (4)$$

が得られる。これから、振幅と強度の関係式を用いると、2 倍波の強度は

$$I_2 = 8\pi^2 \mu_0 c \left( \frac{d_{eff}^2}{n_1^2 n_2} \right) \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \text{sinc}^2 \left( \frac{\Delta k L}{2} \right) I_1^2 \quad (5)$$

となる。ここで、 $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$  はシンク関数、 $\lambda$  は基本波の真空波長である。これから次の結論が導かれる。

1. 2倍波の強度は、基本波強度の2乗に比例する。あるいは、変換効率  $\eta = I_2/I_1$  は基本波強度に比例する。これは非線形効果の本質的な性質で、光が強いほど高い効率が得られる。
2. 変換効率は  $d_{\text{eff}}^2/n_1^2n_2$  に比例する。これを第2高調波発生の特性指数 (figure of merit) といい、非線形光学材料の性能を評価する指標となる。
3. 位相整合条件  $\Delta kL \ll 1$  が満たされていれば、変換効率は  $L$  の2乗に比例して増大する。これは第2高調波発生がコヒーレントな現象であり、強度ではなく振幅が相互作用長に比例することの帰結である。非線形効果で誘起される分極は微弱であっても、相互作用領域全体でコヒーレントに強め合うため、非常に高い変換効率を達成できるのである。なお、変換効率が高くなると、基本波の減衰が無視できなくなる。この場合は第4節で議論する。
4. 位相整合条件が満足されないときは、変換効率は  $\sin^2(\Delta kL/2)$  に比例し、相互作用長  $L$  に対し周期的に変動する。この振動は、結晶を回転して  $L$  を変えて観測できる。この強度の振動を Maker フリンジといい、有効非線形光学定数  $d_{\text{eff}}$  やコヒーレンス長  $l_c = \pi/\Delta k$  の測定に利用される。

## 2 複屈折を用いた位相整合

第2高調波発生で高い変換効率を得るためには、位相整合条件を満足することが不可欠である。位相整合条件  $\Delta k = 0$  は、基本波と2倍波の屈折率が等しくなるときに満たされる。しかし、屈折率に分散があるため、一般にこの条件は満足されない。このため何らかの工夫が必要になる。位相整合法には

1. 複屈折を利用する方法
2. 導波路構造を利用する方法。
3. 非線形感受率を空間的に変調する疑似位相整合法

などが考案されている。本節では複屈折を利用する方法を詳述する。

結晶中では、光波は二つの直交する固有偏光に分かれ、それぞれ異なる屈折率を持って伝わる。この偏光による屈折率差を利用し、分散をキャンセルするのが複屈折を用いた位相整合法である。この位相整合法では、結晶への入射角を調節して位相整合を取ることが多いので、角度位相整合法とも呼ばれる。以下では、簡単のため一軸結晶を例に挙げて説明するが、二軸結晶でも同じ原理で位相整合を達成できる。

### 2.1 一軸結晶の位相整合

結晶を光学的性質で分類すると、等方性結晶、一軸結晶、二軸結晶に分けられる。一軸結晶 (uniaxial crystal) には結晶に固有の特別な軸方向 (光学軸,  $c$  軸) があり、 $c$  軸とこれに直交する方向で異方性がある。電場の振動面が  $c$  軸に直交する偏光を常光線 (ordinary ray),  $c$  軸を含む偏光を異常光線 (extraordinary ray) という (図2)。

常光線の屈折率は波動ベクトルの方向によらず一定値  $n_o$  を取る。一方、異常光線の屈折率は、波動ベクト

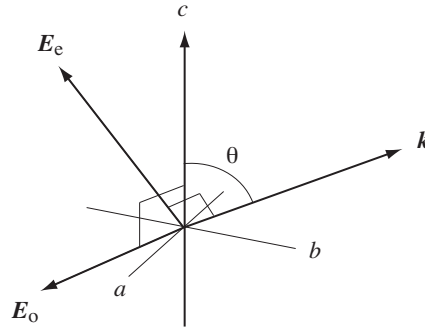


図2 常光線と異常光線

ルが光学軸に対し  $\theta$  の角度をとるとき

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 $n_o$  および  $n_e$  は常光線および異常光線の主屈折率 (principal refractive index) である。 $n_e > n_o$  の結晶を正の一軸結晶、逆の場合を負の一軸結晶という。波動ベクトルの方向に、2つの屈折率をプロットすると、2葉の曲面が描ける。これを屈折率面 (index surface) と呼ぶ。図3は負の一軸結晶の屈折率面を  $c$  軸を含む面で切った断面である。一軸結晶では屈折率面は、常光線に対応する球面と、異常光線に対応する、光学軸を回転軸とする回転楕円面を合わせた曲面になる。図の長さ  $\overline{CE}$  が6で与えられる異常光線屈折率に等しい。

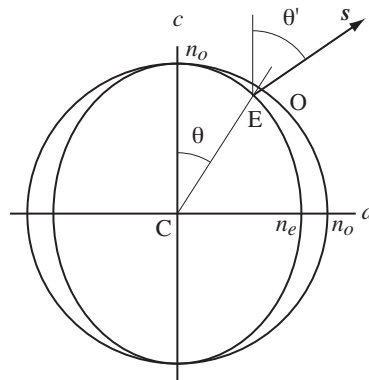


図3 負一軸結晶の屈折率面

第2高調波発生は  $\omega$  光子2個から  $2\omega$  光子1個が作られる現象である。複屈折位相整合法では、 $\omega$  光子2個が同一の偏光状態にある場合と、 $\omega$  光子2個が直交する偏光状態にある場合とに分けられる。前者を type I の位相整合、後者を type II の位相整合と呼ぶ。type I の位相整合では、基本波と2倍波の屈折率が等しくなるように配置する。

$$n_2 = n_1 \quad (7)$$

一方、type II の位相整合では、基本波の直交する2つの偏光に対する屈折率 ( $n_1$  と  $n'_1$ ) の平均値を2倍波の

屈折率に等しくする。

$$n_2 = \frac{1}{2}(n_1 + n'_1) \quad (8)$$

負の一軸結晶の場合の Type I および Type II の位相整合の配置を図 4 に示す。

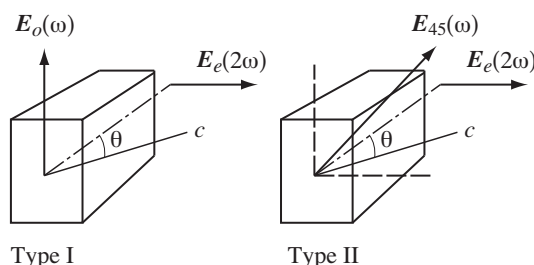


図 4 Type I および Type II の位相整合

図 5 は負の一軸結晶に対し、基本波と 2 倍波の屈折率面を同時に図示したものである。正常分散域では波長の短い 2 倍波の屈折率の方が基本波より大きくなる。したがって、2 倍波の異常光線の主屈折率が基本波の常光線屈折率より小さければ、図 5 の交点の方向で、2 倍波の異常光線の屈折率と、基本波の常光線の屈折率が等しくなる。これが type I の位相整合で、角度  $\theta$  を位相整合角という。角度を調節して位相整合をとるので角度位相整合とも呼ばれる。

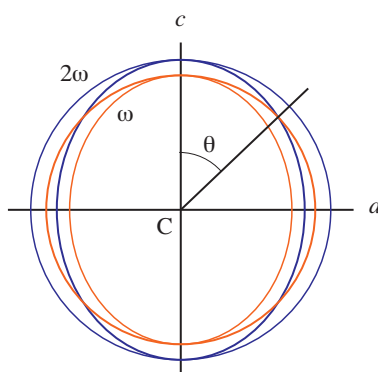


図 5 Type I 角度位相整合

一軸結晶の位相整合条件は次のようにまとめられる。負の一軸結晶 ( $n_e < n_o$ ) の type I の位相整合では、基本波が常光線、2 倍波が異常光線となる。これを (e-oo) と記す。位相整合条件  $n_e^{2\omega}(\theta) = n_o^\omega$  を解くと、位相整合角は

$$\sin^2 \theta = \frac{(n_o^\omega)^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}{(n_e^{2\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}} \quad (9)$$

で与えられる。type II の位相整合は、基本波は常光線と異常光線の組み合わせ、2 倍波は異常光線 (e-oe) で

$$n_e^{2\omega}(\theta) = \frac{1}{2}(n_o^\omega + n_e^\omega(\theta)) \quad (10)$$

から位相整合角が求まる。正の一軸結晶についても同様である。

表 1 角度位相整合で第 2 高調波発生可能な波長域

結晶	type	基本波波長域 ( $\mu\text{m}$ )
KDP	I	0.5174 - (1.7)
	II	0.732 - (1.7)
ADP	I	0.5245 - (1.7)
	II	0.75 - 1.599
LiNbO <sub>3</sub>	I	1.08 - 3.81
	II	1.71 - 2.46
BBO	I	0.4095 - (3.3)
	II	0.525 - (3.3)

位相整合角の計算には屈折率の値を知る必要がある。表 1 に主な非線形光学結晶の第 2 高調波発生が可能な波長域を示した。表中括弧で挟んだ数値は、吸収による限界波長を表す。

位相整合条件は光学軸と波動ベクトルの間の角度を決定するが、光学軸の回りには自由に回転できる。この回転角（方位角）は、有効非線形感受率を最大にする条件から決まる。

## 2.2 例

第 2 高調波発生の位相整合条件の例を挙げよう。図 6 は、LiNbO<sub>3</sub> の Type I および Type II 位相整合条件をプロットした図である。図の横軸は位相整合角  $\theta$  である。縦軸は基本波の波数  $\sigma_1 = 1/\lambda_1$  で単位は  $\mu\text{m}^{-1}$  である\*1。図の右側の縦軸に、対応する波長  $\lambda_1$  を目盛った。

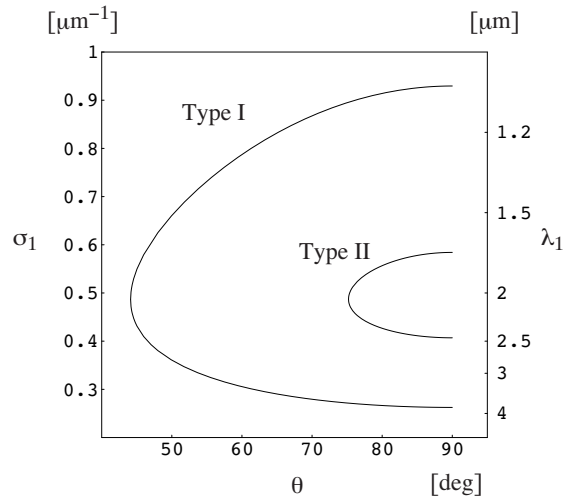


図 6 LiNbO<sub>3</sub> の第 2 高調波発生の位相整合条件

\*1 波長  $\lambda$  でプロットすることが多いが、次節で述べる光パラメトリック過程の計算では波数  $\sigma$  を使う方が圧倒的に便利である。それに合わせて、ここでも波数を用いる。なお、波動ベクトルの大きさ  $k$  (これもしばしば波数と呼ばれる) と  $\sigma$  の関係は、 $k = 2\pi\sigma n$  である。ここで  $n$  は屈折率。

位相整合曲線は、位相整合角が  $90^\circ$  となる点で終端する。この点で、 $n_o^\sigma = n_e^{2\sigma}$  が成り立つ。ここでは  $\theta$  が少々変化しても基本波の波数は変化しない。この状態をノンクリティカル位相整合という。Type I の基本波波数の最大値および最小値は、それぞれ、 $\sigma_{\max}^I = 0.93\mu\text{m}^{-1}$  ( $\lambda_{\min}^I = 1.08\mu\text{m}$ )、および、 $\sigma_{\min}^I = 0.26\mu\text{m}^{-1}$  ( $\lambda_{\max}^I = 3.81\mu\text{m}$ ) となる。この間の波数域で位相整合をとることが可能である。Type II の場合の値は、 $\sigma_{\max}^{II} = 0.58\mu\text{m}^{-1}$  ( $\lambda_{\min}^{II} = 1.71\mu\text{m}$ )、および、 $\sigma_{\min}^{II} = 0.407\mu\text{m}^{-1}$  ( $\lambda_{\max}^{II} = 2.46\mu\text{m}$ ) となる。Type II の方が位相整合の波数範囲は狭い。

図から明らかな通り、位相整合曲線は折り返し点を持ち、ここで位相整合角が極値（最小値）をとる。この点では、基本波波数が少々変化しても  $\theta$  は変化しない。このことから、広帯域 (broadband)、あるいは、色消し (achromatic) 位相整合条件と呼ばれる。広帯域位相整合条件は超短パルスの波長変換において重要になる。

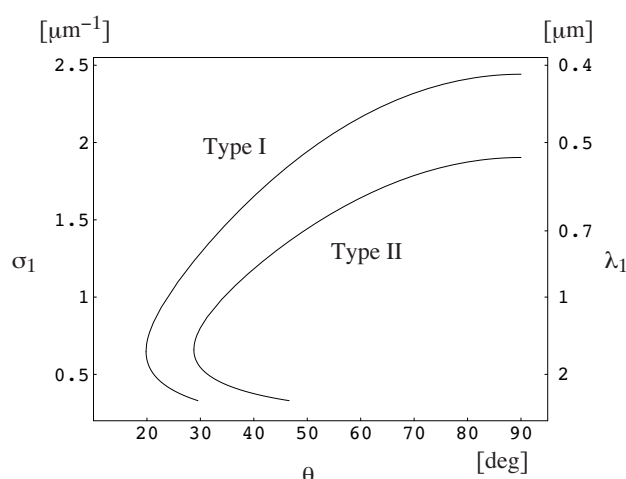


図7 BBO の第2高調波発生位相整合条件

図7はベータ硼酸バリウム (BBO) における第2高調波発生位相整合条件を図示したものである。基本的な構造は  $\text{LiNbO}_3$  の場合と同じである。曲線の下半分が途中で途切れているのは、波数がおおよそ  $\sigma_a = 0.3\mu\text{m}^{-1}$  ( $\lambda_a = 3.3\mu\text{m}$ ) 以下で吸収が大きくなり、波長変換には使えなくなることによる。Type I のノンクリティカル位相整合状態における基本波波数は  $\sigma_{\max}^I = 2.44\mu\text{m}^{-1}$  ( $\lambda_{\min}^I = 0.4095\mu\text{m}$ ) であり、同じく、Type II では  $\sigma_{\max}^{II} = 1.90\mu\text{m}^{-1}$  ( $\lambda_{\min}^{II} = 0.525\mu\text{m}$ ) である。

### 2.3 ウォークオフ

一般に異方性媒質中では、波動ベクトル（波面の進む方向）とポインティングベクトル（光線＝エネルギーの進む方向）が平行にならない。結晶光学によれば、光線方向  $\mathbf{s}$  は屈折率面に直交する（図3）。一軸結晶の場合、常光線では波動ベクトルとポインティングベクトルは平行になるが、異常光線では平行にはならない。このため、基本波と2倍波の波面は一致しても、エネルギーの流れの方向は異なる。これをウォークオフ (walk off) という。ビーム幅が十分広ければ問題にならないが、細く絞ったビームを用いたときは、ウォークオフにより基本波と2倍波は空間的に分離してしまい、相互作用長が制限される。

図8は、負の一軸結晶の Type I の位相整合におけるウォークオフを描いたものである。図の  $\mathbf{s}_\omega$ ,  $\mathbf{s}_{2\omega}$  は基本波および2倍波の光線方向を表す単位ベクトルである。2倍波は異常光線であるから、 $\mathbf{k}_{2\omega}$  と  $\mathbf{s}_{2\omega}$  は平行に

ならない。このため、基本波と2倍波は空間的に横にズレて行く。角度  $\rho$  をウォークオフ角という。

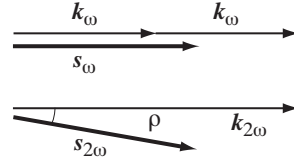


図8 Type I 位相整合のウォークオフ

一軸結晶の異常光線では、波動ベクトル  $k$  が  $c$  軸となす角度を  $\theta$ 、光線方向  $s$  が  $c$  軸となす角度を  $\theta'$  とすると (図3)

$$n_e^2 \tan \theta' = n_o^2 \tan \theta \quad (11)$$

の関係がある。Type I 位相整合の場合、ウォークオフ角は  $\rho = \theta' - \theta$  となる。

$$\tan \rho = \frac{1}{2} n_e^2(\theta) (n_o^{-2} - n_e^{-2}) \sin 2\theta \quad (12)$$

直径  $b$  のビームが相互作用するとき、ウォークオフで分離してしまう距離は  $L_a = b / \tan \rho$  で与えられる。この距離  $L_a$  を口径長 (aperture length) と呼ぶ。

## 2.4 位相整合の許容幅

位相整合の許容幅は実用の上で重要なファクターである。許容幅は、位相不整合

$$\Delta k L = \frac{2\pi L}{\lambda} (2n_2 - n_1 - n'_1) \quad (13)$$

をパラメーターで微分し、 $\delta(\Delta k L) < 2\pi$  より評価できる。角度許容幅の計算には、異常光線の屈折率の角度微分が必要になる。それは

$$\frac{d}{d\theta} n_e(\theta) = \frac{1}{2} n_e^3(\theta) (n_o^{-2} - n_e^{-2}) \sin 2\theta \quad (14)$$

で与えられる。これから、たとえば、負の一軸結晶で type I の位相整合を取った場合の角度許容幅は

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{L} \frac{1}{(n_o^\omega)^3 [(n_e^{2\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}] \sin 2\theta} \quad (15)$$

で与えられる。温度や波長に対する許容度も同様に計算できる。

## 2.5 ノンクリティカル位相整合

角度許容幅の式 15 には分母に  $\sin 2\theta$  の因子があるから、位相整合角  $\theta$  が  $90^\circ$  に近付くと許容度は広がる。 $\theta = 90^\circ$  で1次微分は零になり、許容幅は最も広くなる。これをノンクリティカル (noncritical) 位相整合という。これは、図5において、基本波常光線の屈折率面と2倍波異常光線の屈折率面が  $\theta = 90^\circ$  で接する場合に対応する。さらにこのときは、ウォークオフがなくなるという利点も加わる。ただしノンクリティカル位相整合では微調整に結晶の回転を使えないので、結晶の温度を変えるか、あるいは、半導体レーザーのように波長可変のレーザーを光源とするときは、レーザー波長を制御する。KDP や同類の結晶を用いると基本波の波長域  $500 \sim 700 \text{ nm}$  においてノンクリティカル位相整合が可能になる。温度制御によって位相整合波長を変えることができる。

### 3 擬似位相整合

#### 3.1 周期分極反転

位相整合条件が満たされないとき、非線形分極と2倍波の位相差は伝搬長に比例して増大する。基本波と2倍波の間のエネルギーの流れは相対位相に依存するため、コヒーレンス長  $l_c = \pi/\Delta k$  を周期にエネルギーの流れる向きが入れ替わる。そこで、図9のように、コヒーレンス長ごとに非線形感受率の符号を変えれば、言い換えると周期  $2l_c$  で非線形感受率を変調すれば、基本波から2倍波への一方的な変換を維持できる。非線形感受率の符号を変えるには、例えば、結晶軸の方向を反転すればよい。これを分極反転という。このように、非線形感受率の符号の変調の周期  $\Lambda$  を、波数  $K = 2\pi/\Lambda$  とすると

$$K = \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{\pi}{l_c} = \Delta k \quad (16)$$

を満たすようにして位相整合を取ることを擬似位相整合 (quasi-phase matching) という。実際には、擬似位相整合格子の周期は  $2l_c$  の整数倍でよい。よって、 $m$  を整数として、擬似位相整合条件は

$$\Delta k \pm mK = 0 \quad (17)$$

で与えられる。

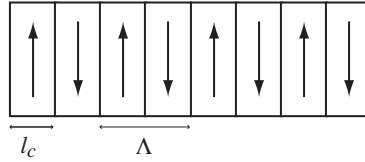


図9 周期分極反転

#### 3.2 変換効率

擬似位相整合では、非線形感受率の符号が空間的に変調される。その形状関数を  $f(z)$  としよう。ここで、 $f(z)$  は分極方向によって、1 または  $-1$  の値をとる関数である。格子の周期を  $\Lambda$ 、デューティ比を  $r$  とする。素子の長さ  $L$  は周期  $\Lambda$  の整数倍であるとする ( $L = N\Lambda$ )。形状関数は

$$f(z) = \begin{cases} 1, & [0 \leq z < r\Lambda] \\ -1, & [r\Lambda \leq z < \Lambda] \end{cases} \quad (18)$$

が  $N$  周期繰り返したものになる (図10)。このとき2倍波の振幅は、基本波の振幅が一定であるという条件で、結合波方程式1を積分して

$$\begin{aligned} F_2(L) &= \frac{i\omega d_{eff} F_1^2}{cn_2} \int_0^L f(z) e^{-i\Delta k z} dz \\ &= \frac{\omega d_{eff} F_1^2}{cn_2} \frac{(1 + e^{-i\Delta k \Lambda} - 2e^{-i\Delta k r\Lambda})}{\Delta k} \frac{(1 - e^{-iN\Delta k \Lambda})}{(1 - e^{-i\Delta k \Lambda})} \end{aligned} \quad (19)$$



となる。最後の項  $|(1 - e^{-iN\Delta k\Lambda})/(1 - e^{-i\Delta k\Lambda})| = \sin(N\Delta k\Lambda/2)/\sin(\Delta k\Lambda/2)$  は  $N$  光波の干渉を表す関数であり、 $\Delta k\Lambda$  が  $2\pi$  の整数倍のときに  $N$ 、それからずれると急速に小さな値に落ち込む。ピークの幅は、周期のおよそ  $1/N$  である。そこで、擬似位相整合条件  $\Delta k\Lambda = 2m\pi$  が満たされているとしよう。通常の位相整合条件が満たされた場合の2倍波強度を  $I_{20}$  として、変換効率を相对比较をすると

$$\eta_{\text{QPM}} = \frac{I_2}{I_{20}} = \frac{4 \sin^2(mr\pi)}{m^2\pi^2} \quad (20)$$

を得る。 $r = (2j + 1)/2m$  のとき、最大値  $4/m^2\pi^2$  をとる。デューティ比は 1:1 に近い方が素子が作りやすいから、結局、次数  $m$  が奇数のとき 1:1、偶数のとき 3:1 が最適条件となる。

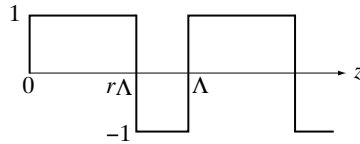


図 10 擬似位相整合素子の形状関数  $f(z)$

擬似位相整合の利点は、複屈折が小さく角度位相整合がとれないような材料でも第2高調波発生が実現できることと、もう一つは、角度位相整合では不可能な偏光の配置が使えることにある。角度位相整合では基本波、2倍波の中に必ず偏光の異なる成分が含まれるが、擬似位相整合ではすべてが常光線あるいは異常光線という組み合わせも可能である。例えば、 $\text{LiNbO}_3$  の非線形感受率は  $d_{33}$  成分が最大であるが、この成分を使うためには基本波と2倍波が同じ偏光状態をとることになる。角度位相整合ではこれは不可能である。

擬似位相整合条件の例として  $\text{LiNbO}_3$  を用いた場合を示そう。図9のような位相整合素子に、光電場が  $c$  軸に平行になる異常光線を入射し、2倍波も異常光線で発生させる。このような配置を Type 0 の擬似位相整合ということがある。図11は、基本波の波数  $\sigma_1 = 1/\lambda_1$  を横軸にとり、波数不整合  $\Delta k/2\pi = (k_2 - 2k_1)/2\pi = 2\sigma_1(n_{2e} - n_{1e})$  をプロットしたものである。縦軸は次数  $m = 1$  のときの擬似位相整合の格子波数  $K/2\pi = 1/\Lambda$  に等しい。

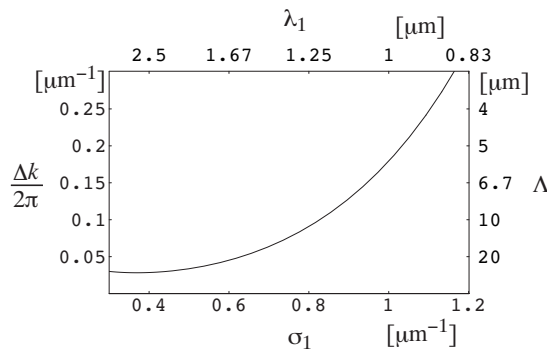


図 11  $\text{LiNbO}_3$  の第2高調波発生時の波数不整合

## 4 変換効率が高いときの扱い

これまでの議論では、変換効率が低く、基本波の減衰が無視できると仮定してきた。ここでは元の結合波方程式に戻り、基本波の減少を考慮した議論をしよう。ただし、吸収は無視できるとする。このとき、以下のようにして結合波方程式から  $\exp(i\Delta kz)$  の項を消去する。結合波方程式 1 をもう一度  $z$  で微分し、整理すると

$$\frac{d^2 F_1}{dz^2} - i\Delta k \frac{dF_1}{dz} + \frac{\omega^2 d_{eff}^2}{c^2 n_1^2 n_2} (n_1 |F_1|^2 - n_2 |F_2|^2) F_1 = 0 \quad (21a)$$

$$\frac{d^2 F_2}{dz^2} + i\Delta k \frac{dF_2}{dz} + \frac{2\omega^2 d_{eff}^2}{c^2 n_1 n_2} |F_1|^2 F_2 = 0 \quad (21b)$$

が導かれる。ところが、エネルギー保存則から

$$n_1 |F_1(z)|^2 + n_2 |F_2(z)|^2 = n_1 |F_1(0)|^2 \quad (22)$$

が成り立つ。これを上の式に代入し、 $F_1$  または  $F_2$  のみの微分方程式に変形できる。

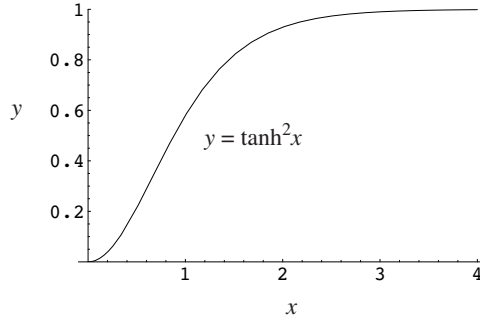


図 12 位相整合条件下での第 2 高調波強度

位相整合条件が満足される場合、2 倍波の振幅は

$$\frac{d^2 F_2}{dz^2} + \frac{2\omega^2 d_{eff}^2}{c^2 n_1^2 n_2} (n_1 |F_1(0)|^2 - n_2 |F_2|^2) F_2 = 0 \quad (23)$$

を満たす。実の微分方程式であるから、 $F_2$  は実数としてよい。そこで

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2 d_{eff}^2 |F_1(0)|^2}{c^2 n_1 n_2} = \frac{2\mu_0 \omega^2 d_{eff}^2}{c n_1^2 n_2} I_1(0) \quad (24)$$

とにおいて、変数

$$y = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \frac{F_2(z)}{|F_1(0)|}, \quad x = \kappa z \quad (25)$$

を導入すると、微分方程式は

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2(1 - y^2)y = 0 \quad (26)$$

と変形される。この微分方程式は  $y = \tanh x$  を解に持つ。よって、2 倍波強度は

$$I_2(z) = I_1(0) \tanh^2(\kappa z) \quad (27)$$

となる (図 12)。吸収を無視したので、飽和領域 ( $\kappa z \gg 1$ ) で基本波のエネルギーは全て 2 倍波に変換される。