

光学

第 2 章 光の伝搬, 反射屈折

黒田和男

1 はじめに

光が直線的に進むことは日常的に経験している。例えば、小さな孔を通過する太陽光は確かに空間を直線的に進むように見える。光の反射も鏡によって日常的に観測される現象である。事実、反射の法則はギリシャ時代から知られていた。幾何学で有名なユークリッド (Euclid) が光線の反射の問題を論じている (BC300 年頃)。

屈折についても、例えば水中の物体は浮き上がって見えるなどの現象は日常的に観測される。凸レンズや凹レンズの結像機能は紀元前から知られており、13 世紀頃には老眼鏡や近視眼鏡として使われていた。17 世紀初頭には、レンズを組み合わせた顕微鏡や望遠鏡が発明されている。しかし反射に比べると屈折の法則の定量化は難しく、これが確立したのは 17 世紀に入ってからであった。というより、この頃までは物理法則を数学的に記述するという考え方は一般的ではなく、物理学 (自然学) の目的は自然の仕組みを定性的に説明することであった。スネル (Snell) は屈折の法則を 1621 年頃に実験的に求めていたと言われているが公表をせず、没後 1662 年にはじめて公にされた。文献として世に始めてでたのは、デカルト (Descartes) の 1637 年

の著作においてである*¹。そこでデカルトは虹が球状の水滴によって光が屈折される現象であるという正しい説明を与えている。デカルトは光をエーテルの運動と捉え、物質による速度の差から屈折の法則を説明した。速度の大小関係が実際と逆転していて誤った解釈をしているが、結果的に屈折の法則は正しく記述されている。

同時期にフェルマー (Fermat) は、光が経路を通過する所要時間が最小値 (停留値) をとるという原理から反射屈折の法則を説明している (1637 年)。これは、近代物理学の重要な方法論の一つである変分原理の最初の例である (3 節)。

17 世紀オランダのホイヘンス (Huygens) は、波動論の観点から、現在、ホイヘンスの原理と呼ばれる方法で光の伝搬を論じた。これについては 4 節に述べる。

本章では、平面波の伝搬からはじめて、反射屈折の法則を説明する。屈折の法則は式で表せば簡単であるが、この法則が導かれる過程を考えるのは、光の伝搬についての考え方を知る上で重要である。本章では、光を平面波とする見方と、光線とする見方が混在するが、一本の光線に一つの平面波が対応すると考えて差し支えない*²。

2 平面波の伝搬と反射屈折の法則

光が媒質中を伝わる様子を、角周波数 ω の単色平面波の伝搬で考えよう。波面の法線方向を単位ベクトル $\mathbf{t} = (L, M, N)$ で表す。光は波面に垂直な方

*¹ 著作のタイトルは「理性を正しく導き、学問において真理を探究するための話。加えて、その方法の試みである屈折光学、気象学、幾何学」。有名な「方法序説」はこの本の前書きの部分である。

*² 光線は太さのない曲線であり、平面波は無限の拡がりを持つ波である。この両極端のものを同一視することは奇妙に感じるかもしれない。「光線は波面に直交する」が正しい表現である。平面波の場合、それに直交する光線は全て平行になるので、一本の光線で代表させることができるのである。

向に進む。よって、 \mathbf{t} は光線の進む方向と考えてよい。さて、屈折率 n の一様な媒質中では、平面波は波面の法線方向に $v = c/n$ の速度で伝わる。よって、隣り合う波面の間の間隔すなわち波長は $\lambda = \lambda_0/n$ となる。ただし、 λ_0 はこの波の真空中の波長である。

2.1 屈折

平面波が屈折率が異なる媒質に入射したとしよう。図 1 に示すように、第 1 の媒質の屈折率を n_1 、第 2 の媒質の屈折率を n_2 とする。この 2 つの媒質中で光の進む速度が異なるため、斜めに入射した平面波は屈折する。入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 の関係を求める方法はいろいろあるが、ここでは、**境界面で波の位相が一致するという条件（位相の連続性）** から求めよう。平面波の波面法線は xz 面内にあるとする。図 1 のように、境界面が xy 面となるように座標系をとる。入射光の波面法線は $\mathbf{t}_1 = (\sin \theta_1, 0, \cos \theta_1)$ となる。同様に屈折光の波面法線は $\mathbf{t}_2 = (\sin \theta_2, 0, \cos \theta_2)$ である。波動ベクトルは

$$\mathbf{k}_j = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} n_j \sin \theta_j \\ 0 \\ n_j \cos \theta_j \end{pmatrix} \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $j = 1$ または 2 である。平面波の波動関数 $\psi_j(\mathbf{r}, t) = u_j(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ の空間部分は $u_j(\mathbf{r}) = A_j \exp(-i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})$ となる。位相の連続性から、位置ベクトル \mathbf{r} が境界面 ($z = 0$) 上にあるとき、 $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}$ が成り立たなくてはならない。このためには、 \mathbf{k}_1 と \mathbf{k}_2 の境界面に平行な成分 (xy 成分) が等しくなくてはならない。よって

$$k_{1x} = k_{2x}, \quad k_{1y} = k_{2y} \quad (2)$$

が成り立つ。これを、入射角と屈折角の関係に直すと

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (3)$$

が導かれる。これを、屈折の法則、あるいは、**スネルの法則** (Snell's law) という。

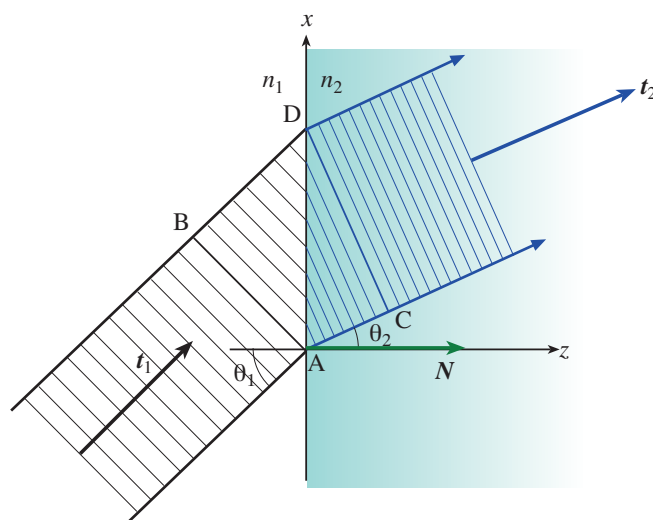


図1 平面波の屈折

式(2)の第2式は、 $k_{2y} = 0$ となることを表す。これは、屈折によって光は振じれないことを意味する。入射光線の方方向ベクトル t_1 と境界面の法線ベクトルからなる面を**入射面** (plane of incidence) という。この結果は、屈折光線も入射面内にあり、そこから外れないことを述べている。

図1から分かることは、光は屈折率の高い方向に曲げられることである。屈折率が高いほど速度は遅くなるから、波は速度の遅い方向に曲げられる、と言い換えてもよい。このような傾向は、屈折率が連続的に変化する場合に顕著に現れる。例えば、屈折率が連続的に変化するタイプの光ファイバーでは、中心部分の屈折率を周辺より大きくすると、光は常に屈折率の高い方に曲げられるため、光ファイバー中に閉じこめられる。蜃気楼のような自然現象も、大気の密度や温度が高さによって変化し、屈折率が分布することによる。この屈折率分布のため、光線が曲げられ、遠くのものが浮き上がって見えたりするのである。

問題 1 屈折率が x 方向に連続的に変わる媒質があったとしよう。この媒質に z 方向に、すなわち屈折率が変化する方向に垂直に光線を入射すると、光線はどのように進むであろうか。

2.2 反射

反射光についても、同様な議論が成り立つ。図 2 のように、反射角を入射角や屈折角と同じ基準で測って φ_1 とすると、波面法線ベクトルについては同じ形の式が成り立つから $\mathbf{t}_R = (\sin \varphi_1, 0, \cos \varphi_1)$ となる。反射の法則も、波動ベクトルの境界面に平行な成分が等しくなる条件で表される。波動ベクトルの z 成分は負になることを考慮し、これから、反射の法則

$$\varphi_1 = \pi - \theta_1 \quad (4)$$

が導かれる*3。ここで採用した角度の定義では、垂直入射 $\theta_1 = 0$ に対し、反射角は $\varphi_1 = \pi$ になることを注意されたい。反射光は入射光とは逆方向に

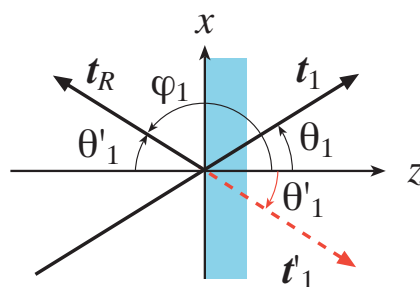


図 2 光線の反射

進むことを考慮し、反射角の基準を入射角とは 180° 逆にとり、 $\theta'_1 = \varphi_1 - \pi$ を反射角とすれば、反射の法則は

$$\theta'_1 = -\theta_1 \quad (5)$$

*3 屈折の法則と同じように正弦関数で表すと、 $\sin \theta_1 = \sin \varphi_1$ となる。

で与えられる。通常はこの定義が用いられ、符号も無視し、**反射角は入射角に等しい**と表現する。この定義では、座標系が入れ替わっているため、光線の方向は $\mathbf{t}'_1 = (\sin \theta'_1, 0, \cos \theta'_1) = -\mathbf{t}_R$ となり、辻褄が合わない。これを救済する方法として、**逆向きに進む光に対しては屈折率を負**に定義するというルールを採用することがある。このルールを適用すると、屈折と反射を一つの式で表すことができるので、大層便利である。スネルの法則 (3) に $n_2 = n'_1 = -n_1$ と $\theta_2 = \theta'_1$ を代入すると、 $\sin \theta_1 = -\sin \theta'_1$ が得られるが、これは式 (5) と同じことになる。よって、式 (3) は反射屈折の法則を同時に表す式であるといえる*4。

2.3 反射屈折の法則の図形的解釈

反射屈折の法則を図形的に解釈しよう (図 3)。入射面内において、光線の入射点 O を中心に、半径 n_1 の円と半径 n_2 の円を描く。入射光線の延長線が第 1 の円と交わる点 P から境界に垂線を下ろす。垂線が境界と交わる点を S とする。垂線が第 1 の円の入射側の部分と交わる点を P' とすると、反射光線は OP' の方向を向く。同様に、 P 点から面法線に平行に引いた直線が第 2 の円と交わる点を Q とする。このとき OQ が屈折光線の方をを表す。図中のベクトルと光線方向のベクトルとの対応は、 $\overrightarrow{OP} = n_1 \mathbf{t}_1$ 、 $\overrightarrow{OP'} = n_1 \mathbf{t}'_1$ 、 $\overrightarrow{OQ} = n_2 \mathbf{t}_2$ となる。

スネルの法則 (3) と反射の法則は、左辺は入射側の媒質の量からなり、右辺は射出 (屈折または反射) 側の量からなり、一種の保存則と考えられる。保存するのは、 nt あるいは波動ベクトル \mathbf{k} の境界面に平行な成分である*5。

*4 反射光を負の屈折率で表すのは、数学的な便法に過ぎないが、最近、本当に負の屈折率を持つ材料が議論されている。事実、物質の誘電率 ϵ と透磁率 μ が同時に負になると、屈折率が負になることが知られていて、負屈折率物質、または、左手系物質 (左利き物質) と呼ばれている。このような物質はマイクロ波や赤外線領域で開発され、実験的に確かめられている。

*5 量子力学によると、光子の運動量は $\hbar \mathbf{k}$ に等しい。よって、スネルの法則は光子の運動

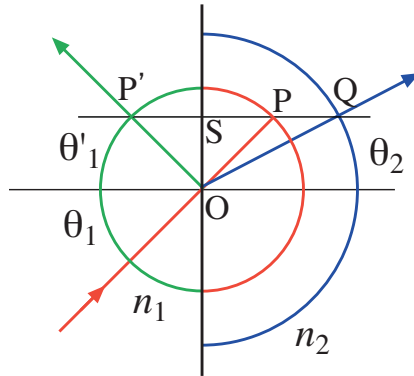


図3 反射屈折の法則の図形的解釈

問題2 図3の作図法が、反射屈折の法則と等価であることを確かめよ。

3 フェルマーの原理

フェルマー (Fermat) は、光線の直進反射屈折の法則を、次の原理の帰結であると主張した。**光は2点間を最短時間で進む**。このフェルマーの原理は、現在では幾何光学の最も基本的な原理であるとみなされている。

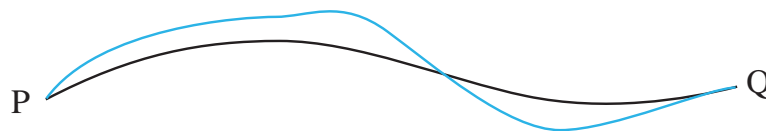


図4 フェルマーの原理。

はじめに、屈折率 n の媒質中の光の速度は $v = c/n$ で与えられることを注意しておこう。ここで、 c は真空中の光速である。さて、任意の2点 P , Q を選び、この2点を結ぶ光線、つまり、 P 点から出て Q 点に達する光線を求めよう (図4)。そのため、何でもよいから P 点と Q 点を結ぶ道を考

量の境界面に平行な成分に対する保存則と解釈できる。

える。空間の各点における屈折率が分かっているから、光の速度が分かる。従って、もしも光線がこの道に沿って進んだとしたら、P 点を出て Q 点に到達するのにかかる時間を計算できる。P 点から Q 点に至るすべての道（無限にある）を考え、それぞれの道に対して所要時間を計算する。その中で、所要時間の最も短い道が、本当に光線がたどる道である。

この原理に基づいて、直進反射屈折の法則を確かめよう。屈折率が一樣な空間の中では光の速度は一定であるから、最短時間の道は最短距離の道である。最も距離の短い道はいうまでもなく、2 点を結ぶ直線である。よって、一樣な空間の中では光線は直進する。このときの所要時間 T は

$$T = \frac{\overline{PQ}}{v} = \frac{n\overline{PQ}}{c} \quad (6)$$

となる。この式の分子に、屈折率 × 距離で与えられる量が現れる。これを、光学的距離、あるいは、**光路長** (optical path length) という。式 (6) の最右辺の分母の c は普遍定数であるから、時間と光路長は比例することになる。このため、フェルマーの原理は、**光路長を最小にする**、と表現するのが普通である*6。

次に反射の法則を考えよう (図 5)。P 点から出た光線が反射面に到達してから折り返して Q 点に向かう道を考える。この場合も光は常に同一の媒質の中にあるから、距離を最小にすればよい。反射点を A とする。PA および AQ 間は直線で結び、長さ \overline{PAQ} を最小にする反射点を探せばよい。Q 点を反射面で映した点 (鏡像という) を Q' とする。長さ $\overline{AQ} = \overline{AQ'}$ であるから、 $\overline{PAQ} = \overline{PAQ'}$ に等しい。よって、P と Q' を直線で結ぶ道が最短の道である。このときの反射面との交点を R とすると、PRQ が本当の光線である。R 点から反射面に垂直に直線 RN を引く。図 5 より、反射の法則 $\angle PRN = \angle QRN$ が成り立つことは明らかである。

*6 幾何学的距離と光路長=光学的距離を混同してはいけない。光は、幾何学的距離が最短になる道を進むのではないことを強調しておく。ただし、屈折率が一定値をとる一樣な空間では、最短光路長=最短距離である。

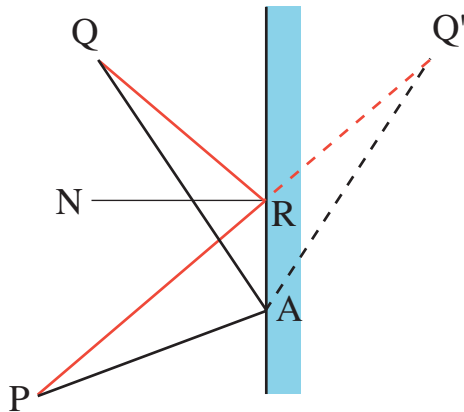


図5 反射の法則

最後に屈折の法則を考えよう。図6のような配置を考える。P点から出た光線はA点で屈折しQ点に到達する。距離PAは $\sqrt{x^2 + h_1^2}$ であり、屈折率は n_1 であるから、光路長 L_1 は $n_1\sqrt{x^2 + h_1^2}$ である。第2の媒質中の光線AQについても同様の式が成り立つ。よって、光路長の合計は

$$L = n_1\sqrt{x^2 + h_1^2} + n_2\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2} \quad (7)$$

で与えられる。よって、これを最小にする x の値を求めればよい(問題3)。

反射の法則の説明の図5において、反射点Rを鏡の面から垂直にずらせば、光路長は元より短くなる。すなわちこの場合は光路長は最小値を取るとは言えない。フェルマーの原理を厳密に述べると、光路長は最小である必要はなく**停留値**をとることが要求される。停留値をとるとは、道を僅かに変形しても光路長が変化しないことを意味する。これは、普通の関数で微分が0になるという条件を拡張したものである*7。

屈折率が連続的に分布する一般の場合に拡張しよう。図4のように、P点からQ点に至る道を考える。この道に沿って測った微小区間の距離を微分量で表し ds とする。この微小区間の光路長は屈折率を掛けて nds になる。

*7 付録Aを参照せよ。

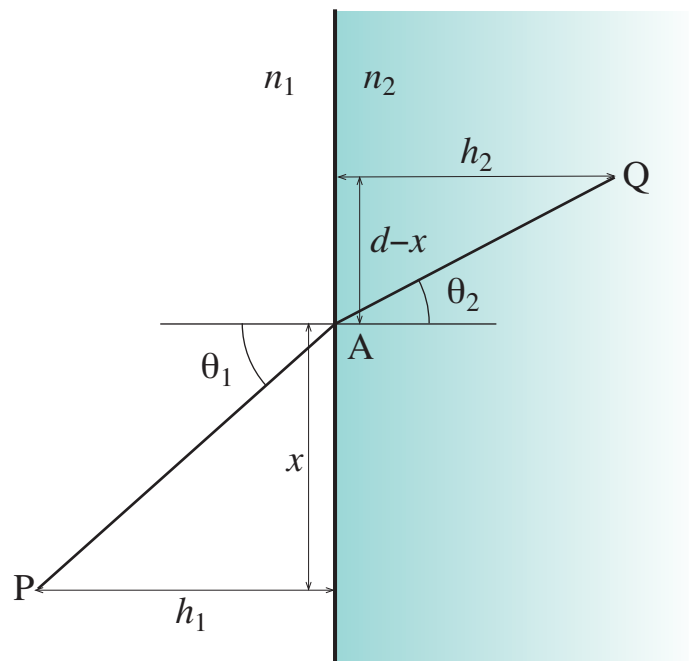


図6 屈折の法則

よって、P 点から Q 点までの光路長 L は、道に沿った積分

$$L = \int_P^Q n ds \quad (8)$$

で与えられる。フェルマーの原理は、**真の光路は、道を僅かに変えても光路長が変化しないような道**であることを主張する。このことは、経路積分 (8) が停留値をとるとも言い換えられる。

問題 3 図6において、PAQ の光路長 L の式 (7) は屈折点の位置 x の関数であるから、これを x で微分し 0 となるときに極値を取る ($dL/dx = 0$)。その結果、屈折の法則が導かれることを確かめよ。

4 ホイヘンスの原理

ホイヘンス (Huygens) ^{*8}は光の波動説の立場から、光の伝搬を2次波または素元波の考え方で説明した。ある時刻における**波面** (wave surface または wavefront) を Σ とすると、 Δt だけ時間が経った後の波面 Σ' が次のように求まる。波面 Σ の各点は2次波を放出する。2次波の半径は、光の速度を v とすると、 $v\Delta t$ に等しい。この2次波の包絡面 (全ての2次波に接する面) が新しい波面 Σ' となる (図7)。このように一步一步波面は進んで行くと考えてるのである。

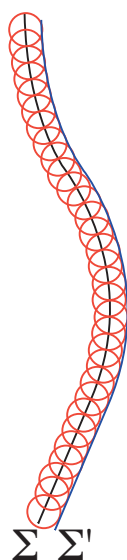


図7 ホイヘンスの原理

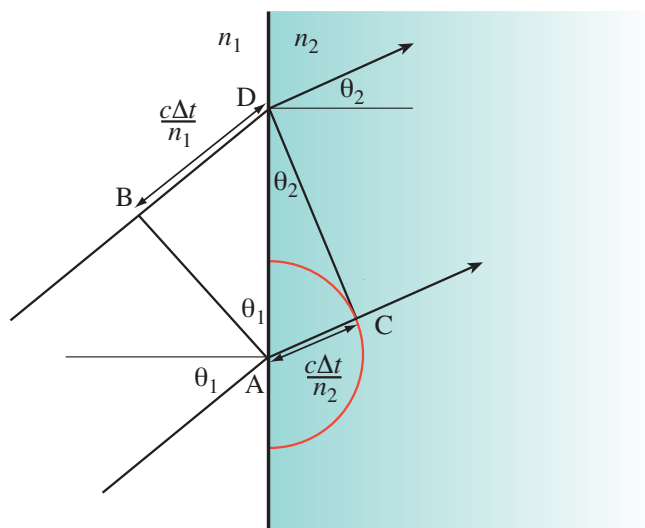


図8 屈折の説明

元の波面 Σ と新しい波面 Σ' の間隔は2次波の半径に等しい。2次波の半径は $v\Delta t = c\Delta t/n$ であるから、光路長 ΔL を計算すると、 $\Delta L = nv\Delta t = c\Delta t$ となり、一定値をとる。以上は、隣接する2葉の波面について述べたものであるが、これを積分すれば、有限の距離離れた波面について次のように

^{*8} ハイゲンスともいう。

言える。すなわち、ホイヘンスの原理で決まる波面は、元の波面から出る光線に沿って測った光路長が等しい面 (等位相面) である。これからさらに、**光線は波面に直交する**ことが言える。

屈折率が一様な空間における平面波の伝搬は、ホイヘンスの原理によれば、ほとんど自明であろう。平面波は、波面の法線方向に等速度で進む。あるいは、波面は波長に等しい間隔で平行に並ぶと考えてもよい。

屈折の法則は、2次波の半径の変化で容易に説明がつく。図8において、ABは第1の媒質中における波面であり、CDは第2の媒質中の波面である。長さBDとACはそれぞれ入射側、屈折側における2次波の半径になるから、それらの比は、各媒質中の光速度 $v = c/n$ 、すなわち、屈折率の逆数の比に等しい。この図は、媒質中の波長が $\lambda = \lambda_0/n$ となることを考慮すると、図1と基本的に同じであり (この場合、BDおよびACはそれぞれの媒質中の波長に等しい)、これから、屈折の法則が導かれる。

反射についても同様に議論することができる。

5 平面反射鏡

平面鏡や全反射を利用したプリズムはシンプルな光学部品であるが、光学機器ではよく使われている。平面鏡は、鏡像の位置に物体の像を作る。

5.1 全反射

平面鏡として、通常ガラスのような材料の表面を用いるのでは、高い反射率は得られない。このため、ガラス表面に金属膜や誘電体多層膜を着け、反射率を上げる工夫がなされている。これとは別に、ガラスの内部反射における全反射を用いると、損失のない100%の反射が実現する。屈折率の大きい媒質から小さい媒質に光線を入射する場合、屈折角の方が入射角より大きくなるから、ある入射角で屈折角が 90° に達する。このときの入射角を**臨界**

角 (critical angle) という。入射側媒質の屈折率を n_1 ，透過側の媒質の屈折率を n_2 とすると，臨界角 θ_c は

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (9)$$

で与えられる。入射角がこれ以上大きくなると，もはや屈折光線は存在しないから，全てのエネルギーが反射する。これが**全反射** (total internal reflection) である。プリズム反射鏡では，全反射が用いられる。例えば，屈折率 1.5 のガラスでは，(空気に対する) 臨界角は $\theta_c = 41.8^\circ$ である。従って，図 9 に示す入射角が 45° の直角プリズムでは全反射が起きる。

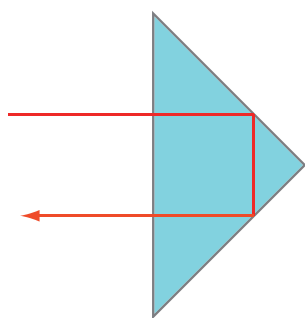


図 9 直角プリズム

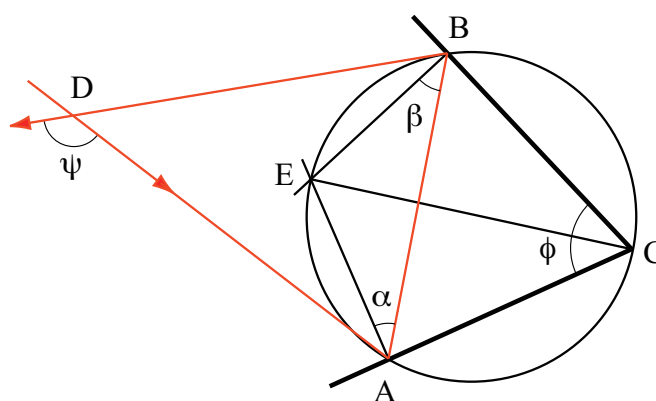


図 10 2枚鏡

5.2 2枚鏡

2枚の平面鏡で，(共通の入射面を持つように) 反射させると，入射光と反射光の間の角度 ψ は，入射角に依らずいつも一定で，2枚の鏡の交角 ϕ の2倍に等しい (図 10 より， $\psi = 2\alpha + 2\beta$ ， $\phi = \alpha + \beta$ が成り立つ)。特に，2枚の鏡が直角に交わるとき，反射光は入射光とちょうど逆方向に反射される

5.3 コーナーキューブ

直角 2 枚鏡は 2 次元の範囲で，入射光を出発点の方向に返す性質を持つ。これを 3 次元に拡張したのがコーナーキューブで，3 枚の平面鏡が互いに直角になるように組み立てられている。コーナーキューブを 2 次元的に敷き詰めた反射鏡は，道路標識の反射板や，地上から月や人工衛星の距離をレーザー光を使って計測するときの反射板として利用されている。

5.4 屋根型プリズム

図 11 の屋根型プリズム (Dove prism) は，厚みのある板を三角形に切り出し，断面が台形になるように不要の部分をカットしたプリズムである。斜面に入射した光は，屈折後，底面で反射し，もう一方の斜面に達し外に出てくる。このプリズムを長軸の回りに角度 ϕ 回転すると，プリズムを通過した光線は 2ϕ 回転する。このプリズムは図形を回転させたいときによく使われる。

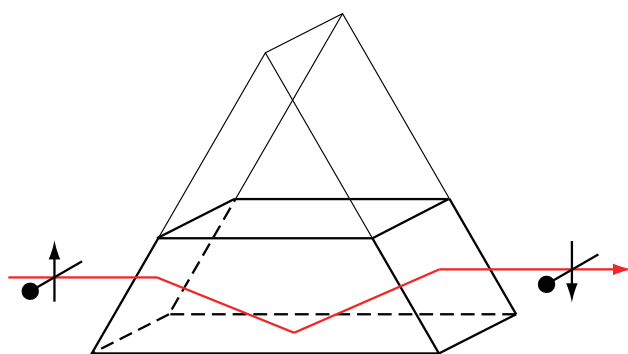


図 11 屋根型プリズム

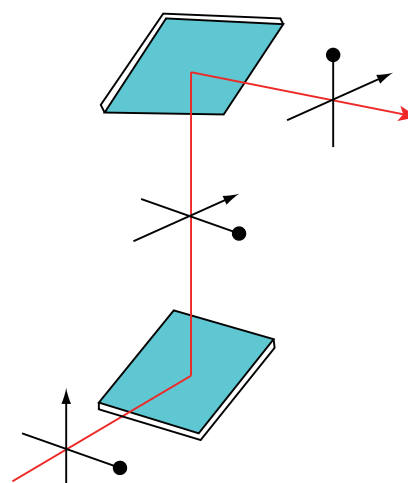


図 12 90° 捩れた潜望鏡

5.5 振れ 2 枚鏡

2 枚鏡を，入射面を振じって配置すると，光線の進行方向の回転に伴い，図形も回転する。例えば，水平に進む入射光線を，水平面に対し上向きに 45° 傾けた平面鏡で垂直方向にはね上げる。この光線を，下向きに 45° 傾けた平面鏡に入射すると，反射光は再び水平な光線になる。2 つの平面鏡の入射面が共通であるとき，いわゆる潜望鏡の配置になる。これに対し，図 12 のように，上の平面鏡を 90° 回転すると，光線は入射光線に対し直角の方向で出てくる。このとき，入射光線についての水平方向が，射出光線では垂直方向になって出てくる。下の鏡と上の鏡の振れ角を調整すれば，任意の角度だけ図形を回転させることができる。

問題 4 図 12 のように 2 枚の 45° 入射の平面鏡を組み合わせた潜望鏡を考えよう。上の平面鏡を回転させれば，観測者は動かず， 360° 全体を見ることができるとは思われる。しかしこの装置では図形は回転してしまい，うまく働かない。どのような工夫をすればよいだろうか考えよ。

6 虹

自然界には，空中に浮遊する水滴や氷塊によって太陽光が散乱されることによる特異な現象が多数見られる。光がランダムに散乱されると，雲のように全体にぼやっと白く見える。虹は，水滴による光の屈折反射現象で，実際には，水滴の中に屈折した光が，中で一度ないし二度水滴内部で反射した後に屈折して外に出てくることによる。内部で一度反射した光が主虹であり，二度反射した光が副虹である。

図 14 は，球に光線が入射し，内部で一度反射した後外に出て行く様子を図示したものである。入射角 θ と屈折角 α の間には $\sin \theta = n \sin \alpha$ の関係



図 13 虹

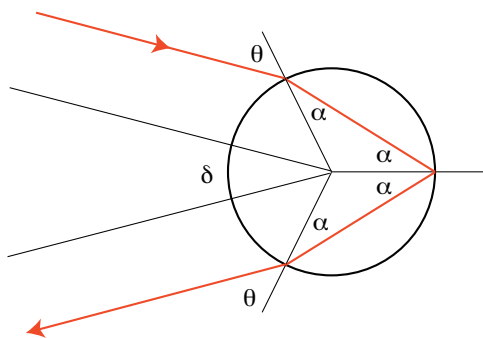


図 14 球による光の屈折と内部反射

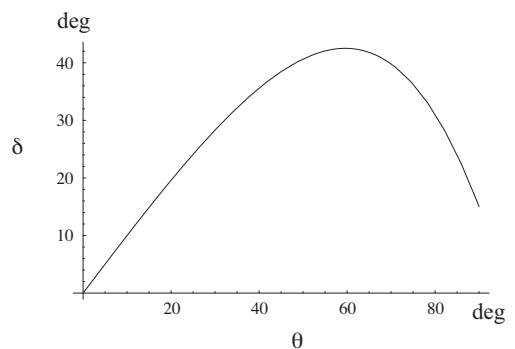


図 15 $n = 1.33$ のときの偏角の入射角依存性

が成り立つ。ここで、 n は水滴の屈折率である。入射光線と射出光線の間
 の角 δ を偏角 (angle of deflection) という。図の場合、偏角は $\delta = 4\alpha - 2\theta$ で
 与えられる。図 15 はこの関係を図示したものである。屈折率が $n = 1.33$
 のとき、偏向角 δ は、 $\theta \approx 60^\circ$ で最大値 $\delta_0 = 42.5^\circ$ をとる。この最大値の近
 くの方向に屈折光が集中するので、この方向が明るく見える。図 16 は虹の
 見える方向を図示したものである。太陽と観測者を結ぶ直線を中心に、そこ
 から偏角の最大値 δ_0 の方向が明るく見える。図 17 は $n = 1.33$ ときの球に
 よる屈折反射の光線追跡結果である。確かに、一番外側に光線が集中するの
 が分かる。しかし実際には光線は内側に拡がっている。このため、虹をよく

見ると、虹の内側が少し明るくなっているのが分かる。

7 プリズム

ガラスを三角形状に加工したものをプリズム (prism) という。プリズムの頂角を α 、プリズム材料の屈折率を n 、空気の屈折率を 1 とする。図 18 のように、第 1 面への入射角を θ_1 、屈折角を ϕ_1 、第 2 面への入射角を ϕ_2 、屈折角を θ_2 とする。これらの間にはスネルの法則 $\sin \theta_j = n \sin \phi_j$ が成り立つ。入射光線と最後の屈折光線との角度 δ を偏角または偏向角という。図より、 $\alpha = \phi_1 + \phi_2$ の関係に注意して、偏角を求めると

$$\delta = \theta_1 - \phi_1 + \theta_2 - \phi_2 = \theta_1 + \theta_2 - \alpha \quad (10)$$

となる。図 19 は屈折率 $n = 1.5$ で頂角 $\alpha = 60^\circ$ のプリズムに対して、入射角と偏角の関係をプロットしたグラフである。図から、偏角が最小値を持つことが分かる。この状態を最小偏角の状態という。最小偏角の状態は計算し

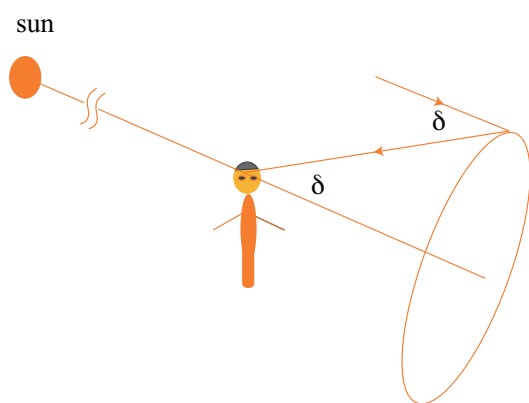


図 16 虹の見え方

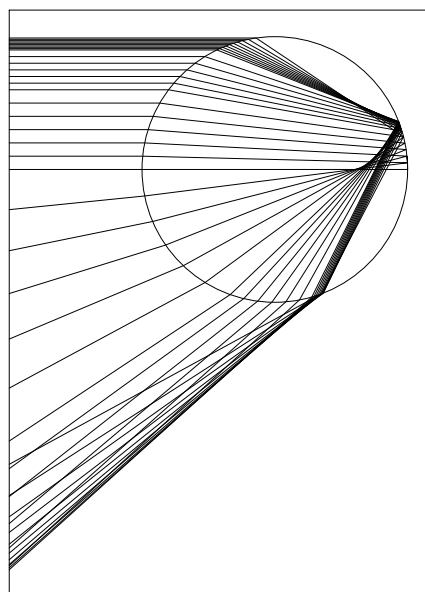


図 17 虹の光線追跡

なくても分かる。対称性を考えると、 $\theta_1 = \theta_2$ のとき、すなわち、光路が頂角の二等分線に対して対称になるときに偏角は最小値を取る。なぜなら、光線は逆行するから、入射光線と屈折光線を入れ替えた光路も物理的に実現可能である。よって、最小偏角の状態が $\theta_1 \neq \theta_2$ であれば、入射角が θ_1 のときと θ_2 のときの2点で偏角は最小値を取るはずである。ところが、図で分かる通り偏角は一つの入射角でしか最小値を取らないから $\theta_1 = \theta_2$ でなくてはならない。このときは、 $\phi_1 = \phi_2 = \alpha/2$ と $\theta_1 = (\delta + \alpha)/2$ が成り立つ。よって、最小偏角 δ_m は

$$\sin \frac{\delta_m + \alpha}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2} \quad (11)$$

の関係を満たす。この式は、最小偏角から屈折率を求める目的で使われる。屈折率が光の波長よって変化するので、プリズムの偏角 δ が波長によつて僅か異なる。これがプリズムの分光作用である。

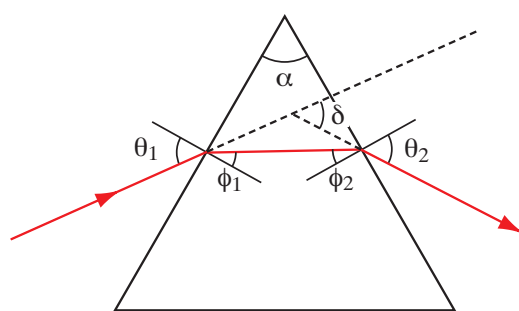


図18 プリズム

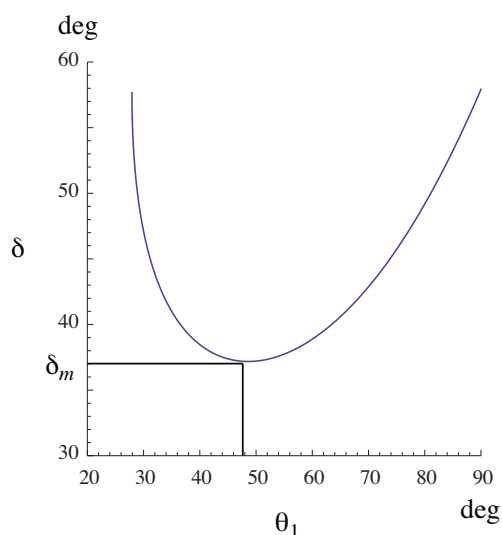


図19 偏角 ($n = 1.5, \alpha = 60^\circ$)

付録 A フェルマーの原理と変分

3節のフェルマーの原理では、光は光路長が最短となる道を進むと述べている。しかし、ある道が光路長最短となることをどうやって知ることが出来るだろうか。関数 $f(x)$ の最大最小 (極値) は、 $df/dx = 0$ となる点で与えられることはよく知られている。フェルマーの原理では、変数 x ではなく、2点を結ぶ道であるから話は少々複雑になるが、以下のように、関数の極値を求める問題に帰着できる。

道に名前を付けて γ と記し、これに対する光路長を $L(\gamma)$ とする。ある道 γ_0 が光路長を最短にする道であれば、 $L(\gamma_0) \leq L(\gamma)$ となる。ただし、比較の対象となる道 γ は γ_0 のすぐ近くを通る道だけでよいから、 γ は γ_0 を少しだけ変形した道と考えてよい。そこで、 γ と γ_0 の差を ϵ とし、 h を変数として $\gamma(h) = \gamma_0 + h\epsilon$ となる道を考えよう (図 20)。道の足し算とは、 γ_0 や ϵ を道の位置を表す 3次元ベクトルと考えたときのベクトル和を意味する。 $h = 0$ のときが γ_0 に、 $h = 1$ のときが γ に対応する。変数 h を 0 から 1 まで変化すると、道も連続的に変化する。道 $\gamma(h)$ に対する光路長を $L(h) \equiv L(\gamma(h))$ とする。 $L(h)$ は普通の意味での h の関数となるから、 $dL/dh = 0$ で極値をとる。微分が 0 になるということは、道を僅かに変形しても、光路長は変化しないことを意味する。フェルマーの原理は、任意の ϵ に対して $dL/dh = 0$ が成り立つことを要求するものである。フェルマーの原理の例のように、道が与えられたとき、道に沿った積分で関数値が求ま

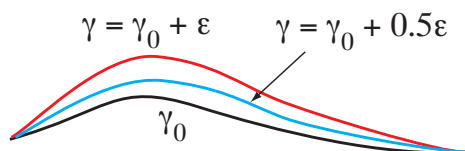


図 20 変分法の道の変形

るとき、つまり、道を変数とする関数を汎関数という。道を僅かに変形したときの関数値の変化率を変分という。普通の関数に対する微分に相当するのが、汎関数に対する変分である。フェルマーの原理は、光路長積分 (8) に対する変分が 0 になるような道が、光が実際に通る道であることを主張するものである。このような形式の物理法則を変分原理という。物理の法則には、変分原理の形に書けるものがいくつかある。