光学

第3章　幾何光学

黒田和男

1　はじめに

本章では，光学機器設計の基礎となる幾何光学について学ぶ。光学機器を形成する最も代表的な素子が**レンズ** (lens) である。眼，カメラ，顕微鏡，望遠鏡など，レンズの結像作用を用いた光学機器が多数ある。

結像 (imaging) とは，図 1 のように，**物体** (object) の各点から出た光束[*1]を，屈折や反射を用い，一点に集めることである。光束が集まる点を**像** (image) という。このような機能をもつ装置を**結像光学系**という。その代表的なものがレンズである[*2]。レンズとはガラスの両面を球面に磨いたものである[*3]。中心の厚さが縁の厚さより厚いものを凸レンズ，薄いものを凹レンズという。実際の光学系では，結像性能を上げるため複数のレンズを組み合わせたものを使う。これを区別するときは，一枚のレンズを単レンズ，単レンズを組み合わせたレンズを複合レンズという。

[*1] 一点（点光源）から出た光線の集まりを光束 (pencil of rays) という。遡っても一点に集まらないものは光束とはいわない。

[*2] 反射鏡や，ホログラムのような回折を利用した素子も結像作用を持つ。

[*3] 最近ではレンズの製造法が進歩し，単純な球面ではない非球面レンズもよく使われるようになった。

光線は**逆行**するから，物体と像の関係は入れ替えることができる。すなわち，像の位置に物体を置くと，同じ光学系で元の物体の位置に像ができる。このようにどちらに物体を置いても構わないので，二点が結像関係にあることを，**共役** (conjugate) であるといい，二点を共役点と呼ぶ。

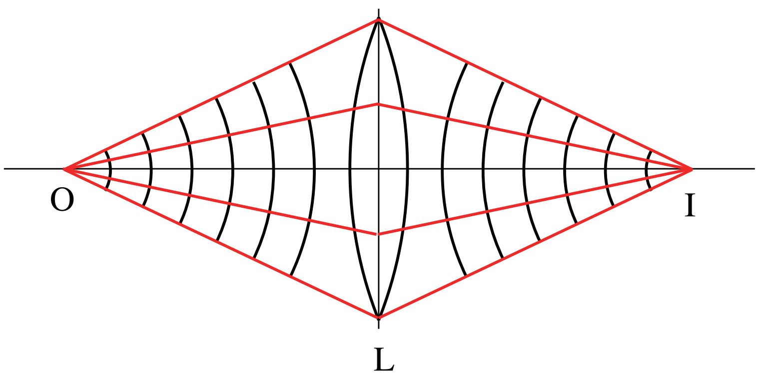


図 1　結像。O:物体，I:像，L:レンズ

レンズは波面を変換する素子であると考えることもできる。図 1 で，物体 O からは発散する球面波が出る。レンズを通過したのちは，この球面波は，像 I に収束する球面波に変換される。この図から明らかな通り，波面 (O を中心とする同心円) と光線 (O から放射する直線) は直交する。この関係は一般的に成り立ち，球面以外の波面に対しても，波面と光線の直交関係が成り立つ[*4]。

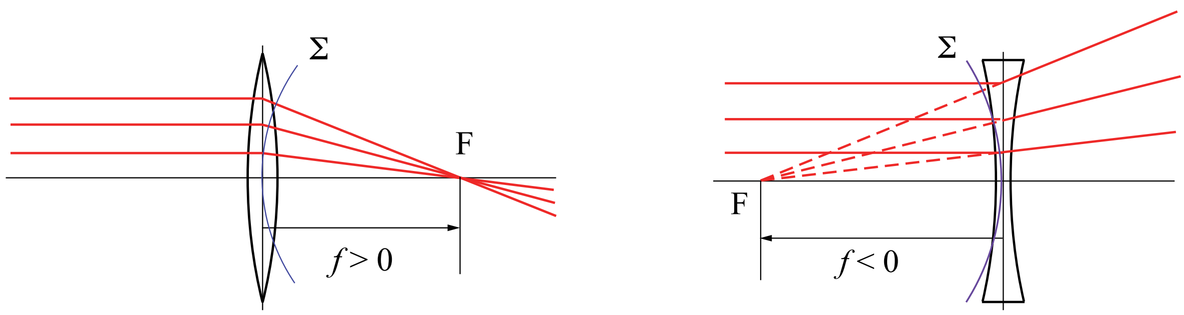
2　焦点距離

最も簡単な厚みのほとんどない単レンズ (薄肉単レンズ) を考えよう。レンズの中心を垂直に貫く直線[*5]，つまりレンズの中心軸を**光軸** (optical

[*4] これをマリュス (Marus) の定理という。
[*5] 厳密には，前面の曲率中心と後面の曲率中心を結ぶ直線。

axis) という[*6]。凸レンズを考えると（図 2 左），光軸に平行な光束[*7]はレンズで曲げられて一点に集まる[*8]。この点を**焦点** (focal point) という。レンズから焦点までの距離を**焦点距離** (focal length) といい，f で表す。焦点距離は，焦点がレンズの右側にある時を正にとる。よって，凸レンズの焦点距離は正になる。

凹レンズの場合は光が一点に集まることはないが，図 2 右に示す通り，光束はあたかも一点から発散して出てきたように見える。この見かけの発散点を凹レンズの焦点とする。凹レンズの焦点はレンズの左側にくるから，焦点距離は負になる。



凸レンズ　　　　凹レンズ

図 2　薄肉単レンズの焦点距離

凸レンズに逆向きに平行光束を入れると，レンズの手前の点に集光する。これを物体側焦点という[*9]。光線は逆行するから，物体側焦点から出た発散光束はレンズを通過後平行光束になる。物体側でも焦点距離が定義できるが，物体空間も像空間も同じ空気中にあれば，この距離は像側で求めた焦点

[*6] 最近では回転対称性がなく，自由曲面からなるレンズも増えてきた。このような場合，光軸は適当に決めるしかない。
[*7] 平行な光束は，点物体が無限に遠くにある場合にあたる。
[*8] もちろんこのことは近似的にしか成り立たない。これからのズレを球面収差という。
[*9] これに対し，像空間にある焦点を像側焦点という。

距離に等しい[*10]。言い換えると，レンズの前後を逆に使っても焦点距離は変わらない。これは単レンズだけではなく，どんなレンズについても成り立つ。しかし，変わらないのは焦点距離だけで，収差やほかの性能は変化する。

3　薄肉単レンズの焦点距離

十分薄い単レンズを考えよう。レンズの前面は半径 R_1 の球面，後面は半径 R_2 の球面でできているとする。ただし，R の符号は曲率中心が面の右側にあるとき，すなわち，左に凸面の時を正にとる。このルールに従うと，図3のように両面が凸面で出来ているレンズでは，$R_1 > 0, R_2 < 0$ となることに注意せよ。半径 R の逆数 $c = 1/R$ を曲率という。レンズ材料の屈折率を n とする[*11]。レンズの厚さ d は十分小さく，厚さの効果は無視できるとする。このとき，焦点距離（の逆数）は

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{1}$$

で与えられる[*12]。この式は**レンズの公式** (lens maker's formula) と呼ばれる[*13]。

レンズの焦点距離の逆数をレンズの**パワー** (power) という[*14]。単位は長さの逆数になるが，m^{-1} をジオプトリー (diopter) という[*15]。

式 (1) を見ると，焦点距離は，屈折率と両面の曲率半径の 3 つの量から決まることになる。ということは，ある特定の焦点距離を持つレンズを作ろ

[*10] 物体空間と像空間の屈折率が異なるときは，像側焦点距離と物体側焦点距離の大きさの比は屈折率の比の逆数に等しくなる。

[*11] 空気の屈折率は 1 とする。

[*12] 厚いレンズでは，厚さに比例する項が右辺に加わる。付録 B を見よ。

[*13] 直訳すれば，レンズ職人の公式。

[*14] 屈折力ともいうが，屈折を用いない球面反射鏡の場合にも使われるので，カタカナのままパワーと呼ぶことにする。

[*15] ドイツ語で Dioptrie。眼鏡レンズの焦点距離を表すときに用いられる。「度」ともいう。

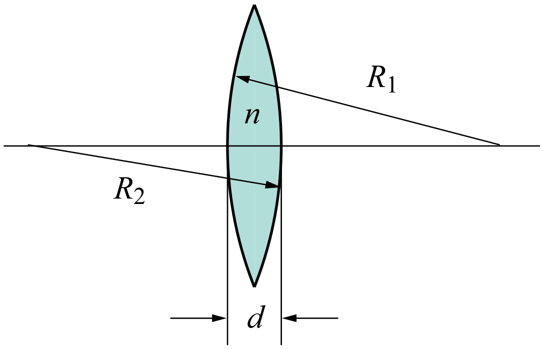


図 3　単レンズ

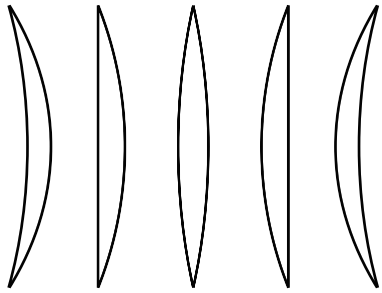


図 4　凸レンズのベンディング

うとしても，材料（屈折率）や形状（両球面の半径）に選択の余地が残されていることを意味する。つまり形状や材料が異なっても同一の焦点距離を持つレンズが作れるのである。焦点距離 f のレンズを作るために屈折率 n のガラスを使うとしても，各面の曲率の差が所定の値になっていればよいのだから，たとえば第 1 面の曲率 $c_1 = 1/R_1$ は自由に取ることができる。これを**ベンディング** (bending) という。凸レンズのベンディングを図 4 に示す。眼鏡のレンズのように 1 面が凸，もう 1 面が凹であるレンズを凸凹レンズ，あるいは新月を意味する言葉からとってメニスカス (meniscus) といい，一方が平面であるレンズを平凸 (plano-convex) レンズあるいは平凹 (plano-concave) レンズ，両面とも凸（または凹）であるレンズを両凸（または両凹）レンズという。では実際の形状をどう決めるかというと，使用状態で収差ができるだけ小さくなるように選ぶ。凸レンズについて言うと，平行光線を集光する目的には平凸レンズがなかなかよい。ただし凸面を平行光線側に向ける。

高級なレンズは何枚もの単レンズを組み合わせてできている。いろいろな収差を補正して高性能な像を得るためには，このようなレンズの組み合わせが必要なのである。

4　複合レンズの焦点距離

複合レンズや厚さのあるレンズの焦点距離を考えよう。焦点は光軸に平行な光線が集まる位置であるから，複合レンズであっても問題なく決定できる。焦点距離を測る起点はどこにすればよいであろうか。答えは**主点**と呼ばれる位置である。これは，入射側の平行光線と，焦点を通る射出光線のそれぞれを延長した交点である。図 5 の H の位置がこれに相当する。この位置に薄肉単レンズがあるとすると，入射光線と射出光線の関係が変更なしに保たれることが分かるであろう。焦点距離とは，主点から焦点までの距離である。主点のより詳しい説明は 11 節を見よ。

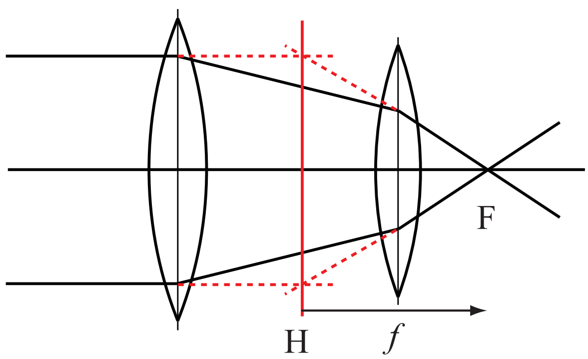


図 5　複合レンズの焦点距離

5　瞳と開口数

レンズの特性としては，焦点距離のほかに，レンズの大きさ（口径）も重要である。口径は，レンズが取り込むことにできる光束の量を決める。光束を物理的に制限するものを**絞り** (stop) という。絞りは像の明るさを決定する重要な要素でもある。単レンズであれば，レンズの大きさが絞りに対応する。カメラレンズでは，明るさを調整できるように，直径が可変の絞りがレ

ンズの中に組み込まれている。

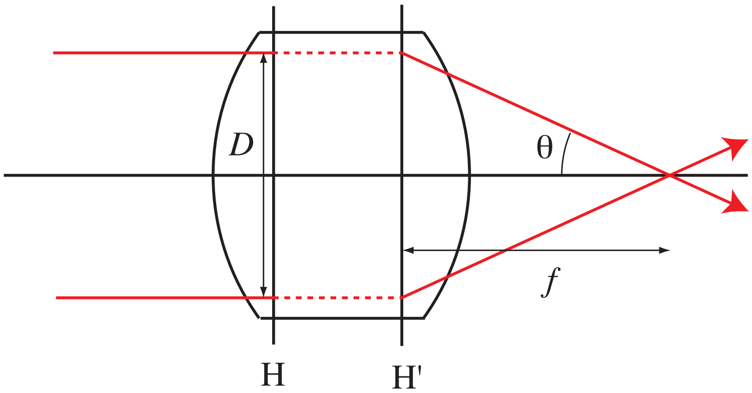


図 6　レンズの F 値。H，H$'$ は主点

図 6 のようなレンズを考えよう。レンズの直径を D，焦点距離を f とする。焦点に集まる光束の角度拡がりは，D/f で決まる。この逆数を**口径比**または **F 値** (F number) という。

$$F = \frac{f}{D} \tag{2}$$

逆数で定義されるので，F 値が小さいほど，口径の大きい，つまり明るいレンズになる。

複合レンズの大きさは次のように定義する。図 7 にある通り，物体側からレンズを見たときの絞りの像（つまり，絞りから物体側にあるレンズ群による像）を**入射瞳** (entrance pupil) という。同様に，絞りから像側にあるレンズによる像を**射出瞳** (exit pupil) という。**入射瞳の大きさをレンズの大きさ D とする**。なお，入射瞳と射出瞳は共役である。つまり，射出瞳は入射瞳の像になる。

顕微鏡の対物レンズでは，焦点に集まる光束のうち，一番外側の光線 (周辺光線 marginal ray) が光軸となす角度を θ として

$$NA = \sin\theta \tag{3}$$

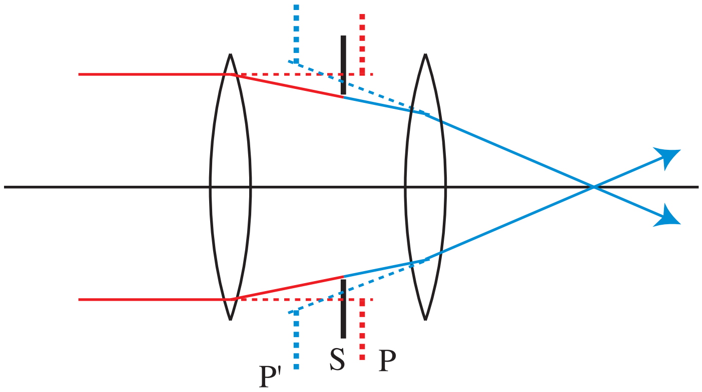


図 7　絞り，入射瞳，射出瞳

図 8　顕微鏡対物レンズ

と定義される量を**開口数** (numerical aperture) という[*16]。開口数と F 値は $NA = 1/(2F)$ の関係で結ばれる[*17]。図 8 に示す顕微鏡対物レンズでは，この側面に，20 という数字と 0.40 という数字が刻んである。20 はレンズの倍率である。一方，0.40 が開口数 NA である。

収差は，光束の中心をなす光線を基準に考える。物点が光軸上にある時は，光軸が中心の光線になる。物点が有限の高さを持つときは，入射瞳の中心を通る光線が中心光線になる。これを**主光線** (principal ray または chief ray) という。入射瞳と射出瞳は共役だから，主光線は像側では射出瞳の中心を通って，像面に到達する。

6　近軸光線追跡

光学系は，複数の要素レンズを光軸上に配置した構造を持つ。。物体の一点から出た光線が，光学系を通過する様子を計算で追いかけることを**光線**

*16 媒質の屈折率が n のとき，開口数は $NA = n \sin\theta$ で定義される。

*17 図 6 では F 値は $\tan\theta$ で決まるように見える。一方，NA は $\sin\theta$ で定義されるから，sin と tan の間の変換が必要なように思える。事実は，レンズの収差を取るという観点から，図の H′ の面は平面ではなく，焦点を中心とする半径 f の球面になるように設計する。したがって F 値も $\sin\theta$ で決まり，$NA = 1/(2F)$ の関係が厳密に成り立つ。

追跡 (ray tracing) という。多数の光線を追跡し，それぞれの光線が像面上を通過する点をプロットした図を**スポットダイアグラム** (spot diagram) という。スポットダイアグラムの点の散らばり具合で，結像性能を評価できる[*18]。

光学系は光軸に対し回転対称で，追跡する光線は，光軸を含む面内に含まれるとする。光軸を z 軸に，それに垂直な方向を x 軸にとる。光線は，ある z の位置における高さ x と，光軸に対する傾き角 u で表される。レンズを通過すると光線の傾き u が変化し，レンズから次のレンズまで進むと高さ x が変化する。高さや傾きの変化を逐次計算して行けば，光線追跡が完了する。

特に，高さ x と角度 u が十分小さく，計算で高次の項が無視でき線形近似が許されるとき，**近軸光線追跡** (paraxial ray tracing)，または，創始者の名前をとって**ガウス光学** (Gaussian optics) ともいう。

以下の計算で必要となるのは，光線の伝搬による高さの変化である。高さ x_1，傾き角 u の光線が，光軸にそって z だけ進んだとしよう（図 9)。その時の光線の高さ x_2 は次のように与えられる。

$$x_2 = x_1 + z \tan u \approx x_1 + zu \tag{4}$$

ただし，近軸光線であるから角度 u は十分小さいので，$\tan u \approx u$ と近似

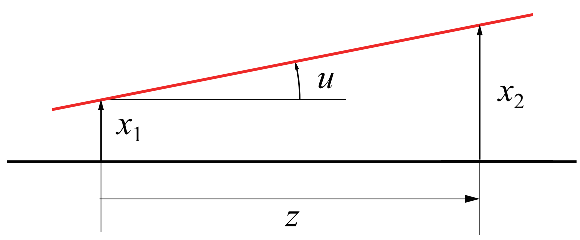


図 9　光線の伝搬による高さの変化

[*18] 光線追跡してスポットダイアグラムなどを表示する専用のソフトが市販されている。このようなソフトには，結像性能を定量的に評価して最適化する自動設計ソフトが組み込まれている。

した。

次に，焦点距離を f のレンズによる光線の屈折を考えよう（図 10)。レンズの中心を通る光線は曲げられず真直ぐ通過する。よって，レンズから f だけ離れた焦点面上での光線の高さは $f\tan u \approx fu$ になる。この点が光軸に対して傾いた平行光線が集まる焦点となる。レンズが理想的であれば，傾き角 u で入射した光線は全て，焦点面上で高さ fu の点に収束するはずである。そこで，レンズに高さ x で入射した光線の屈折後の傾き角を u' とする。式 (4) を用いれば，$fu = x + fu'$ が成り立つから

$$u' = u - \frac{x}{f} \tag{5}$$

が得られる。

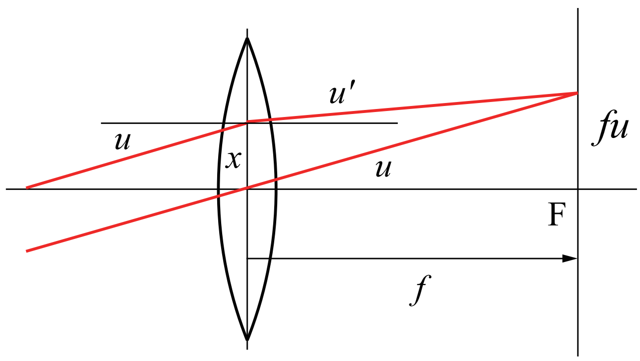


図 10　レンズによる光線の屈折

7　行列による表現

前節の近軸光線追跡の結果を，行列を使って表そう。光線の高さと傾きをベクトル表示して (x, u) とする。図 9 の場合，はじめのベクトルを (x_1, u_1)，z だけ伝搬した後のベクトルを (x_2, u_2) とする。光線の高さについては，式

(4) が成り立つ。一方，傾き角は変化しない $(u_2 = u_1)$ から

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

と表現できる。行列

$$\mathbf{T}(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

を**移行** (translation) 行列とよぶ。

次に図 10 の焦点距離 f のレンズによる屈折に移ろう。レンズに入射する光線のベクトルを (x, u)，屈折後の光線のベクトルを (x', u') とする。レンズの厚さは無視できるとしているから，光線の高さは変化しない $(x' = x)$。よって，次のように行列表示できる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \qquad P = \frac{1}{f} \tag{8}$$

ここで，P はレンズのパワーである。行列

$$\mathbf{R}(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

を**屈折** (refraction) 行列とよぶ。

8　複合レンズ

一番簡単な複合レンズとして，焦点距離 f_1 のレンズと焦点距離 f_2 のレンズを d_1 だけ離して置いた複合レンズを考えよう（図 11）[*19]。第 1 レンズから順に光線を表すベクトルがどのように変換されるかをまとめると，表 1 のようになる。ただし，第 1 のレンズのパワーを $P_1 = 1/f_1$，第 2 のレンズのパワーを $P_2 = 1/f_2$ と置いた。

[*19] 2 枚のレンズを組み合わせたものはダブレット (doublet) とよばれる。

表 1　2 枚組レンズ

第 1 レンズ入射側	第 1 レンズ射出側	第 2 レンズ入射側	第 2 レンズ射出側
$\begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x'_1 \\ u'_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_2 \\ u_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x'_2 \\ u'_2 \end{pmatrix}$
	$= \mathbf{R}(P_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$	$= \mathbf{T}(d_1) \begin{pmatrix} x'_1 \\ u'_1 \end{pmatrix}$	$= \mathbf{R}(P_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ u_2 \end{pmatrix}$

この表から，入射光線と射出光線の関係は次のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(P_2)\mathbf{T}(d_1)\mathbf{R}(P_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

ただし

$$\mathbf{M} \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

である。行列 $\mathbf{M}$ を**光線行列** (ray matrix) という[*20]。

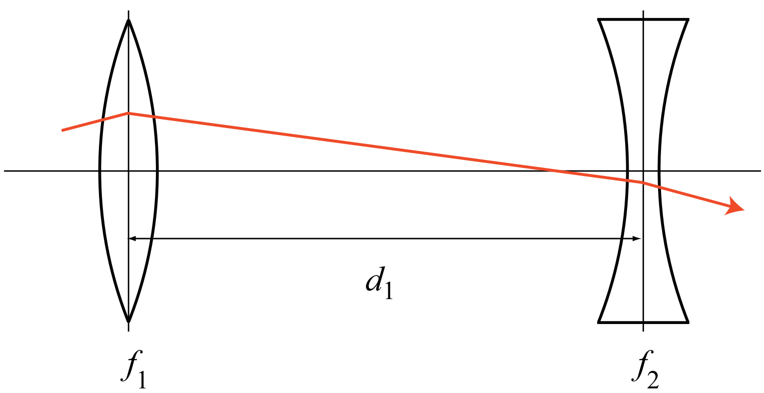


図 11　2 枚組レンズ

[*20] この行列の呼び方は一定しておらず，**システム行列**，$ABCD$ **行列**などとよばれることもある。

上の式を一般化するのは容易である。K 個の薄肉単レンズを並べた複合レンズの光線行列は，式 (11) を拡張して

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(P_K)\mathbf{T}(d_{K-1})\mathbf{R}(P_{K-1})\cdots\mathbf{R}(P_2)\mathbf{T}(d_1)\mathbf{R}(P_1) \tag{12}$$

と書ける。なお，光学系を作図するときは光線は左から右に進むように描く。一方，行列の掛け算では，各行列は右から順に掛けて行く。作図のときと並び方が逆転するので間違えないように注意すること。

光線行列の重要な性質として，その行列式が 1 になることが挙げられる。光線行列は移行行列 $\mathbf{T}$ と屈折行列 $\mathbf{R}$ の積で表されるが，移行行列，屈折行列はそれぞれ行列式が 1 であるから，その積の光線行列の行列式も 1 になる。すなわち

$$\det\mathbf{M} = AD - BC = 1 \tag{13}$$

が成り立つ。

問題 1　式 (11) で与えられる光線行列 $\mathbf{M}$ は次のようになることを確かめよ。

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1-d_1P_1 & d_1 \\ -P_1-P_2+d_1P_1P_2 & 1-d_1P_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

特に，2 枚のレンズを密着させたとき ($d_1 \approx 0$)，光線行列は

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1-P_2 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。これは，パワーが $P = P_1 + P_2$ のレンズの屈折行列と等しい。

問題 2　前問（問題 1）より，焦点距離 f_1 と f_2 のレンズを d だけ離しておいた 2 枚組のレンズの焦点距離 f は

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1f_2} \tag{15}$$

で与えられることを示せ。

また，第 1 のレンズの像側焦点から，第 2 のレンズの物体側焦点までの距離を δ とすると，合成レンズの焦点距離は

$$\frac{1}{f} = -\frac{\delta}{f_1 f_2} \tag{16}$$

となることを確かめよ。

9　結像関係式と倍率

9.1　結像関係式

光学系の光線行列が分かっているとして，それから結像関係式を導こう。すなわち，物体の位置が与えられたとして，それから，像の位置を求めよう。

光学系の光線行列 $\mathbf{M}$ が式 (11) で与えられるとする。図 12 のように，光学系の入射面から z だけ離れた面[*21]から出発する光線の高さと傾きを (x, u) とし，光学系を通過した後，光学系の最終面から z' だけ離れた面に到達した

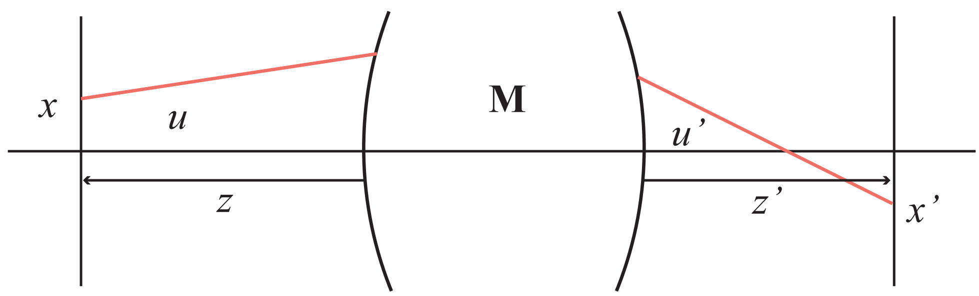


図 12　光線行列を用いた結像関係の導出

[*21] 図の右側を正とする。従って，図 12 では $z < 0$ である。

光線の高さと傾きを (x', u') とする。出発面と到達面を結ぶ光線行列 $\overline{\mathbf{M}}$ は

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{M}} &= \begin{pmatrix}\bar{A} & \bar{B}\\ \bar{C} & \bar{D}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & z'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -z\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}A + Cz' & -Az + B - Czz' + Dz'\\ C & -Cz + D\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{17}$$

となる。

光線が像面を通過する位置は $x' = \bar{A}x + \bar{B}u$ で与えられる。2 面が共役であれば，x' は物体面を出る光線の傾き角 u には依らないはずだから，$\bar{B} = 0$ でなくてはならない。よって，光学系の最終面から測った像の位置は

$$z' = -\frac{Az - B}{Cz - D} \tag{18}$$

で与えられる。

9.2 倍率

結像の倍率を考察しよう。物体の高さと像の高さの比 β を結像の**横倍率** (transverse magnification) *22という。一方，軸上物点 $(x = 0)$ を出た光線に対する物体空間における光線の角度 u と像空間における角度 u' の比 γ を**角倍率** (angular magnification) という*23。

横倍率 β は，物体面を出る光線の高さ x と，像面を通過する光線の高さ x' の比で与えられるから

$$\beta = \frac{x'}{x} = \bar{A} = A + Cz' \tag{19}$$

となる。一方，角倍率 γ は，軸上物点 $(x = x' = 0)$ に対し，物体側の光線と像側の光線がそれぞれ光軸となす角度の比であるから

$$\gamma = \left.\frac{u'}{u}\right|_{x=0} = \bar{D} = D - Cz \tag{20}$$

*22 lateral magnification ともいう。

*23 角倍率を角度の tan の比で定義することもある。近軸理論では違いは生じない。

で与えられる。

以上をまとめると，共役面を結ぶ光線行列 $\overline{\mathbf{M}}_0$ は

$$\overline{\mathbf{M}}_0 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ C & \gamma \end{pmatrix} \tag{21}$$

と表される。光線行列の行列式はいつも 1 であるから

$$\beta\gamma = 1 \tag{22}$$

の関係がある。横倍率と角倍率は独立ではなく，逆数の関係にある。これから

$$\beta^{-1} = \gamma = D - Cz \tag{23}$$

の関係が導かれる。結像関係を求めるのに式 (18) を直接使うより，物体の位置 z から式 (23) を用いて結像倍率を求め，それを式 (19) に代入して，像の位置 z' を求める方がよい[*24]。

9.3 薄肉単レンズ

薄肉単レンズによる結像関係は次のようになる。焦点距離が f，パワーが $P = 1/f$ の薄い単レンズの光線行列は屈折行列 $\mathbf{R}(P)$ そのものである。このとき，式 (23) および (19) は

$$\begin{aligned} \beta^{-1} &= 1 + Pz = 1 + \frac{z}{f} \\ \beta &= 1 - Pz' = 1 - \frac{z'}{f} \end{aligned} \tag{24}$$

[*24] ただし，12 節で議論するアフォーカル系では $C = 0$ であり，横倍率や角倍率は物体位置によらず一定をとるため，倍率から像の位置を求めることは出来ない。式 (18) あるいは式 (34) を用いる。

となる。あるいは，結像関係式 (18) から $z' = z/(Pz+1)$ が導かれる。両辺の逆数をとると，よく知られた結像の式

$$\frac{1}{z'} - \frac{1}{z} = P = \frac{1}{f} \tag{25}$$

が導かれる。

10　ヘルムホルツ・ラグランジュの不変式

横倍率と角倍率の逆数関係 (22) は，近軸光学の最も重要な結果である。物体の高さを h，像の高さを h' とすると，横倍率は $\beta = h'/h$ である。一方，軸上物点からの光線の角度を u，像空間での光線の角度を u' とすると，角倍率は $\gamma = u'/u$ である。よって，式 (22) は

$$hu = h'u' \tag{26}$$

と書き直せる。この式の左辺は屈折前の値のみによって決まり，右辺は屈折後の値のみによって決まるから，これは各光線に対し一定値を取る保存量になる。これを，**ヘルムホルツ・ラグランジュの不変式** (Helmholtz-Lagrange invariant) という[*25]。式 (22) は，光線行列の行列式が 1 になるという関係

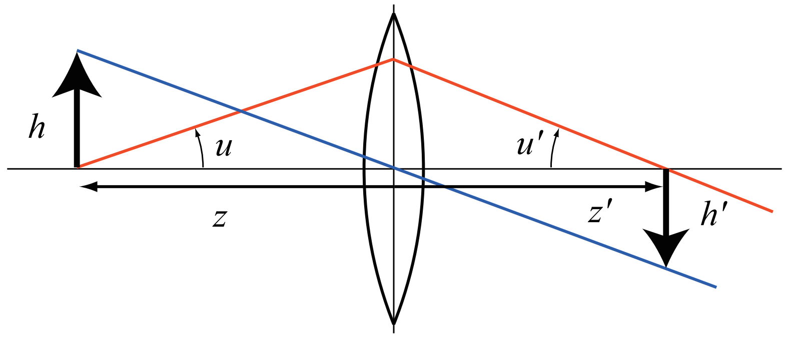


図 13　薄肉単レンズのヘルムホルツ・ラグランジュの不変式

*25 これまでの議論では，レンズは空気の中に置かれているとした。つまり，物体側の空間の屈折率 n と像側の空間の屈折率 n' は等しく 1 であるとしてきた。しかし人の眼や水

(13) から導かれた。よって，ヘルムホルツ・ラグランジュの不変式は，光線行列の行列式が 1 になることと等価であることを強調しておこう。

図 13 は薄肉単レンズの場合の，ヘルムホルツ・ラグランジュの不変式の関係を表したものである。ここで，z および z' はそれぞれ，物体距離，像距離である。こうすると，図から明らかな通り，横倍率は $\beta = z'/z$ となり，一方，角倍率は $\gamma = z/z'$ となるから，確かに両者は逆数の関係になる。すなわち，縮小された像を作ると，像を形成する光束の拡がり角は大きくなり，逆に，拡大像では，結像光束の拡がり角は狭くなる。

ヘルムホルツ・ラグランジェの不変式から導かれる重要な事実として**輝度不変則**がある。これについては 10 章を見よ。

11　主要点

光学系の構成がわかっていると，物体の位置や大きさが与えられたとき，像の位置や結像倍率を近軸光線追跡によって求められることが分かった。ところが，近軸結像特性を求めるためには，主要点と呼ばれる点が決定できれば十分であることを示そう[*26]。主要点は，焦点，主点，接点の三種類の点である。焦点は既に出てきた。主点とは，薄いレンズのレンズ面に対応する面である。接点も薄いレンズのレンズ面に対応するが，薄いレンズの中心に入った光線は屈折せず直進するという性質から決まる点である。

中カメラなどでは，物体側と像側で屈折率が異なる。この場合のヘルムホルツ・ラグランジェの不変式は $nhu = n'h'u'$ となる。通常ヘルムホルツ・ラグランジェの不変式はこの形で与えられる。なお，物体空間と像空間の屈折率が異なる場合については付録 A を見よ。

[*26] ただし，アフォーカル系は例外である。これについては 12 節を見よ。

11.1　焦点・主点・節点

光学系に光軸に平行な光線束を入射させると，像側で一点に収束する。この点 F′ を像側焦点または後側焦点[*27]という（図 14）。平行光線とは無限遠にある物点から出た光線束と考えられるから，像側焦点は無限遠物点の共役点である。同様に，物体側焦点または前側焦点 F は射出光束が平行光となる物点，すなわち無限遠像点の共役点である。あるいは光学系の像側から平行光束を入射したときの収束点と考えてもよい。物体側焦点と像側焦点は互いに共役関係にはない。

主点 (principal point) とは横倍率 β が 1 となる共役点で，H，H′ で表す。**接点** (nodal point) とは角倍率 γ が 1 となる共役点で，N，N′ で表される。これらはひとつの光学系にそれぞれ一組しかない。式 (22) により，横倍率が 1 ならば，角倍率も 1 になるから，主点と節点は一致する[*28]。

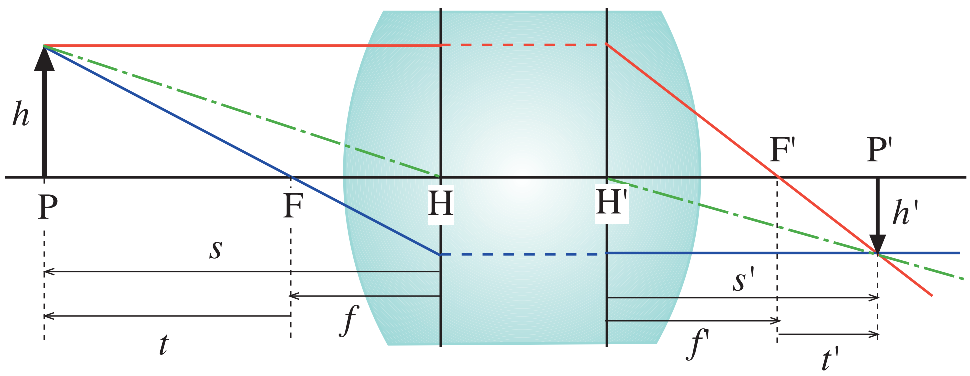


図 14　主要点。F, F′：焦点，H, H′：主点

[*27] 焦点を英語で focus または principal focus または focal point という。物体側像側を区別する呼び方もいろいろある。(the first & the second)，(primary & secondary)，(anterior & posterior)，(front & rear)，(object-side & image-side)，(object-space & image-space) など

[*28] 物体空間と像空間の屈折率が異なるときは，主点と接点は一致しなくなる。ここでは，この一般的な場合については扱わず，主点と節点とは一致するとして議論を進める。

主点から焦点までの符号付き距離を焦点距離 (focal length) という。焦点距離は，物体側と像側でそれぞれ定義される。ここでは，像側の焦点距離を f'，物体側の焦点距離を f と表記する。これまで出てきた焦点距離は像側の焦点距離 f' であるので，混同しないように注意願いたい。両者の間には簡単な関係式が成り立つ。

焦点，主点，節点を光学系の**主要点** (cardinal points) という。これらの点は，物体側と像側に 3 つずつあるから計 6 個あることになる[*29]。主要点の性質をまとめると次のようになる。なお，主点を通る光軸に垂直な面を主面という。

1. 物体空間で光軸に平行な光線は像側焦点を通る。
2. 物体側主面を高さ x で通過する光線は，像側主面から同じ高さ x で出てくる。
3. 物体側節点において角度 u で光軸を横切る光線は，像側節点において同じ角度 u で光軸を横切る。

同じことが，物体と像を入れ替えても成り立つ。特に，ここで仮定しているように，**物体空間と像空間の屈折率が等しい**ときは

4. 物体側の焦点距離と像側の焦点距離は，大きさが等しく符号が逆である。
5. 主点と節点は一致する。

以上の性質を使うと，結像関係を作図から求めることができる（図 14）。物体の位置に光軸に垂直に適当な長さの線分を描く。物体の先端から光軸に平行に出た光線は，像側主点で曲げられ像側焦点に向かって進む。物体の先端から物体側焦点に向かう光線は物体側主点で曲げられ光軸に平行な光線として像空間に出ていく。この 2 本の光線の交点が像の位置と大きさを与える。

[*29] 主点と節点が一致する場合は，計 4 点。

11.2　光線行列と主要点

横倍率と光線行列要素の関係式 (19) と (23) を用いると，主要点の位置と光線行列要素の関係を求めることができる。結果を表 2 にまとめる。ただし，物体側の量は第 1 レンズを基準として測った距離，像側の量は最終レンズを基準として測った距離である。

表 2　主要点と光線行列

	物体	像	倍率
物体側焦点	D/C	∞	$\beta = \infty$
像側焦点	∞	$-A/C$	$\beta = 0$
主点	$(D-1)/C$	$-(A-1)/C$	$\beta = 1$
焦点距離	$1/C$	$-1/C$	

行列要素 C の符号を変えたものが光学系のパワーで，焦点距離の逆数に等しい。

$$P = -C = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} \tag{27}$$

物体側の焦点距離は像側の焦点距離の符号を変えたものに等しい[*30]。

表 2 から，係数 C が本質的に焦点距離を与え，係数 A が像側，係数 D が物体側の主要点の位置を決定することがわかる。係数 B が出てこないが，これは式 (13) の制約条件により他の 3 つの係数に従属して決定されてしまうからである。

問題 3　表 2 を確かめよ。

[*30] 物体空間と像空間の屈折率が 1 から異なるときは次の式になる。$P = -C = n'/f' = -n/f$

11.3　結像関係式と結像倍率

光学系の主要点が与えられたときの，結像関係式と結像倍率を求めよう。

11.3.1　ニュートンの式

はじめに，物点，像点までの距離をそれぞれの空間の焦点を基準に測ることにする。図 14 に示す通り，物体距離，像距離をそれぞれ t，t' とする。このとき，横倍率 $\beta = h'/h$ は，図 14 から明らかな通り

$$\beta = -\frac{f}{t} = -\frac{t'}{f'} \tag{28}$$

と簡潔な形に表される。ただし，f，f' は物体側および像側の焦点距離である。これから，容易に結像関係式が求まる。

$$tt' = ff' = -f'^2 \tag{29}$$

これを，ニュートン (Newton) の式という。この式から，物体距離と像距離は本質的に反比例の関係にあることが判る。

問題 4　角倍率 γ について

$$\gamma = \frac{t}{f'} = \frac{f}{t'}$$

が成り立つことを示せ。

11.3.2　結像関係式の標準形

次に，物点，像点の位置をそれぞれ物体側，像側の主点から測って s，s' とする。焦点から測った距離 t，t' とは，$s = t + f$，$s' = t' + f'$ の関係にある。この関係式を式 (28) に代入すると，横倍率 β は，光学系のパワー P を

用い

$$\beta^{-1} = 1 - \frac{s}{f} = 1 + sP, \qquad \beta = 1 - \frac{s'}{f'} = 1 - s'P \tag{30}$$

と表される。これから，よく知られた結像関係式

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = P = \frac{1}{f'} \tag{31}$$

が導かれる[*31] 。これは，結像関係式の標準形と呼ばれる。この式は，薄い単レンズの場合の式 (25) と同じである。要するに，主点というのは，薄い単レンズの場合のレンズ面と等価の面であるといえる。

11.3.3　縦倍率

光軸上に置いた，軸方向の微小物体に対する結像倍率を，縦倍率 (longitudinal magnification) といい，α で表す。ニュートンの式 (29) を微分すると

$$\alpha = \frac{dt'}{dt} = -\frac{t'}{t} = \frac{\beta}{\gamma} = \beta^2 \tag{32}$$

となる。縦倍率は横倍率の 2 乗に等しい[*32]。よって，屈折光学系では縦倍率は常に正である。一方，射出光線が入射光線と逆方向に進む反射光学系では，前後関係が入れ替わるから，縦倍率は常に負になる。物体と像の関係で，正立結像と倒立結像で上下の関係は入れ替わるが，前後関係はいつでも一定であることが判る。

上の式から，縦倍率，横倍率，角倍率は独立ではなく，一つが決まってしまえば，残りはそれに従属して決まってしまうことが判る。特に，3 次元的に考えて，物体の形状に忠実な像を結ぶのは，$\beta = \pm 1$ のときに限られる[*33]。

[*31] 物体空間と像空間の屈折率が異なるときは

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = P = \frac{n'}{f'}$$

[*32] 物体空間と像空間の屈折率が異なるときは $\alpha = (n'/n)\beta^2$。

[*33] 物体空間と像空間の屈折率が異なるときは $\beta = \pm n/n'$。

11.4　主要点の実験的な決定

複合レンズが与えられたときの，主要点を実験的な求め方を考えよう。

焦点は，平行光線を入れたときの光の集まる点である。レンズの球面収差が大きくなると，焦点決定の精度は落ちるが，光束を絞って精度を確保する。ただし，あまり絞りすぎると焦点深度が深くなりやはり精度が落ちる。よって，最適な条件を探す必要がある。

主点は複合レンズの中にある場合も多く，横倍率が 1 という定義で主点を決めるのは難しい。その代わり，角倍率が 1 という性質を用いて次の手順で節点を決めることができる。レンズの光軸に沿って平行光線を入射し，後方に置いたスクリーン上に焦点を作る。そこで，光軸上の点を中心にレンズを回転する。これは相対的には，光線がレンズに斜めに入射することに相当する。物体側節点に入射した光線は，入射光線と平行に，像側節点から射出する。この光線がスクリーン上に作る点が回転後の焦点の位置になる。回転中心が像側節点と一致しないときは回転により像側節点の位置は変化するから，スクリーン上の焦点の位置は振れる。ところが回転中心が像側節点と一致するときは，回転しても像側節点は動かないから，スクリーン上の焦点も動かない。故に，レンズを回転してもスポットが動かない位置を探せば，そこが像側節点の位置である。こうして，像側節点を実験的に見つけることができる。この方法を nodal slide 法という。

12　アフォーカル系

前節で結像光学系には主要点が存在し，それで結像関係が完全に決まってしまうことを述べた。しかし，これに一つ例外がある。平行光線が入射したとき，像空間で再び平行光線として射出される光学系では，有限の位置に焦点を持たない。このような光学系を**アフォーカル系** (afocal system) と呼

ぶ。このような光学系では，入射角が $u = 0$ であれば，射出角も $u' = 0$ となる。すなわち，光線の高さ x に依らず，光線の傾き $u = 0$ に対し，$u' = 0$ が対応する。これは，光線行列で $C = 0$ となっていることを意味する。よって，光線行列は

$$\mathbf{M}_{\text{afocal}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \tag{33}$$

となる。光線行列の行列式は 1 であるから，$AD = 1$ が成り立つ。この光学系のパワーは $P = 0$ となるから，焦点距離は無限大であると言ってもよい。

焦点が存在しないといっても，結像しないわけではない。事実，第 3 節に述べた結像理論は $C = 0$ でも成り立つ。はじめに，結像倍率を考えよう。入射光線と射出光線の角度の関係は，光線の高さに依存せず，$u' = Du$ となる。よって，角倍率は $\gamma = D$ となり，物体位置に依らずいつでも一定値をとる。結像倍率の間の関係式 (22) から，横倍率も一定である。このことは横倍率の式 (19) に $C = 0$ を代入しても確かめられる。事実，$\beta = A$ である。次に，結像関係式 (18) に移ろう。ここに $C = 0$ と $D = A^{-1}$ を代入すると

$$z' = A^2 z - AB = \alpha z - AB \tag{34}$$

が導かれる。ただし，α は縦倍率である。この結果から，物体と像の位置関係は線形になることが分かる。このことは，縦倍率 α が一定値を取ることからも結論できる。

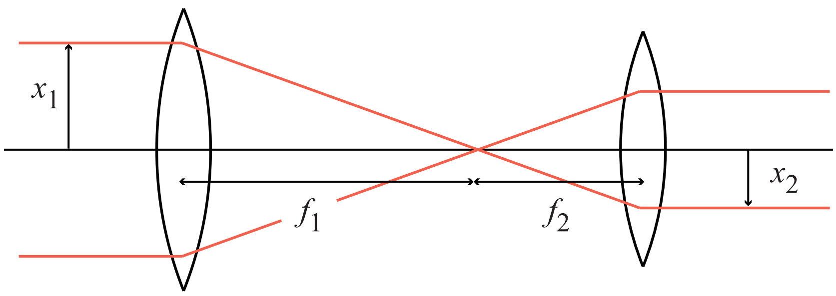


図 15　アフォーカル系の例

図 15 はアフォーカル系の最も簡単な例である。この光学系は，焦点距離 $f_1 > 0$ の凸レンズと焦点距離 $f_2 > 0$ の凸レンズを，第 1 のレンズの像側焦点と第 2 のレンズの物体側焦点を一致させて配置したものである。図 15 から容易に，平行光線が入射すると，平行光線として出て行くことが理解できるであろう。結像倍率は図 15 から，$\beta = x_2/x_1$ で与えられる。符号を考慮すると，これは 2 つのレンズの焦点距離の比 $\beta = -f_2/f_1$ に等しいことが分かる。角倍率は横倍率の逆数 $\gamma = -f_1/f_2$ で与えられる。望遠鏡がこのような光学配置をとることから，望遠鏡系とも呼ばれる。なお，望遠鏡の倍率は，角倍率に等しい。なぜなら，無限に遠くにある物体の大きさは，眼に入射する光線の角度に比例するからである[*34]。

付録 A　物体空間と像空間の屈折率が異なる場合

これまでは，レンズは屈折率 1 の空気の中に置かれているとして議論を進めてきた。同じレンズを水の中に浸したらどうなるだろうか。あるいは，人の眼のように，物体空間と像空間の屈折率が異なり，一つの曲面だけでレンズ効果が起こるときはどのように扱えばよいだろうか。厚みのあるレンズでは，レンズの前面における屈折と，後面における屈折を分けて考えなくてはならない。この場合，空気とガラスの境界面での屈折を考えることになるから，まさしく，物体空間と像空間の屈折率が異なる場合に相当する。このように，近軸を含む一般的な光線追跡では，本節のような取り扱いは不可欠である。

近軸光線追跡で追いかけてきたのは，今までは光線の高さ x と傾き u であった。屈折率 n の媒質中では，光線の傾き u の代わりに，それに屈折率を

[*34] 物体が十分遠いが有限の位置にある時は，次のように考えてもよい。結像の横倍率は $|\beta| < 1$ であるから，像は物体に比べ β だけ小さくなる。しかし，像の位置は物体の位置に比べ，縦倍率 $\alpha = \beta^2$ だけ近づく。よって，像は相対的に $\beta/\alpha = 1/\beta = \gamma$ だけ大きく見えることになる。

掛けた量 nu を追いかけた方がよい[*35]。すなわち，光線行列を (x, nu) の変換行列と定義するのである。光線行列は，移行行列と屈折行列の積で表されることには違いないが，屈折は薄い単レンズの代わりに，単一の球面による屈折が基礎となる。

A.1　移行行列

はじめに，光線の直行による高さの変化を考えよう。高さの変化 $\Delta x = x_2 - x_1$ は光線の傾きと距離だけで決まり，屈折率は関係ない。しかし，追跡する量を nu としたために，見掛け上，変換式は異なる。つまり，移行の式 (4) を変形し

$$x_2 = x_1 + \frac{z}{n} \cdot nu \tag{35}$$

と表現することになる。よって，屈折率 n の媒質中では，移行行列は $\mathbf{T}(z/n)$ となる。距離を屈折率で割った z/n を換算距離と呼ぶ[*36]。

A.2　単一球面による屈折

曲率半径 R の面による光線の屈折を考えよう。この曲面の物体側の屈折率を n，像側の屈折率を n' とする。図 16 のように，光軸上の点 P から出た光線は，点 Q で屈折し，点 P$'$ で再び光軸と交わる。入射光線の傾きを u，射出光線の傾きを u'，屈折点 Q の高さを x，入射角を θ，屈折角を θ'，曲率中心 C から点 Q へ引いた直線が光軸となす角度を σ とする。ただし，図 16 の場合，符号は $u > 0, u' < 0, \theta > 0, \theta' > 0, \sigma < 0$ である。符号を考慮すると，三角形の簡単な関係から，$\theta = u - \sigma$，$\theta' = u' - \sigma$ が成り立つ。スネルの法則は，近軸光線の近似では，$n\theta = n'\theta'$ となる。これらを代入し，整理

[*35] 近軸光学の制約を離れたとき，光線追跡する量は，光線の高さと光学的方向余弦の組 $(x, n \sin u)$ である。

[*36] 距離に屈折率を掛けた nz は，光学的距離，または，光路長である。

すると

$$n'u' = nu - (n' - n)\sigma = nu - \frac{(n' - n)}{R}x \tag{36}$$

が導かれる。ただし，近軸の範囲で $\sigma = -x/R$ となることを用いた。これを行列で表すと

$$\begin{pmatrix} x' \\ n'u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ nu \end{pmatrix}, \qquad P = \frac{n' - n}{R} = \Delta nc \tag{37}$$

となることがわかる。ただし，$\Delta n = n' - n$ は屈折率差，$c = 1/R$ は面の曲率である。屈折面のパワー P は屈折率差と曲率の積で与えられる。屈折行列は見掛け上は式 (9) に変更はない。

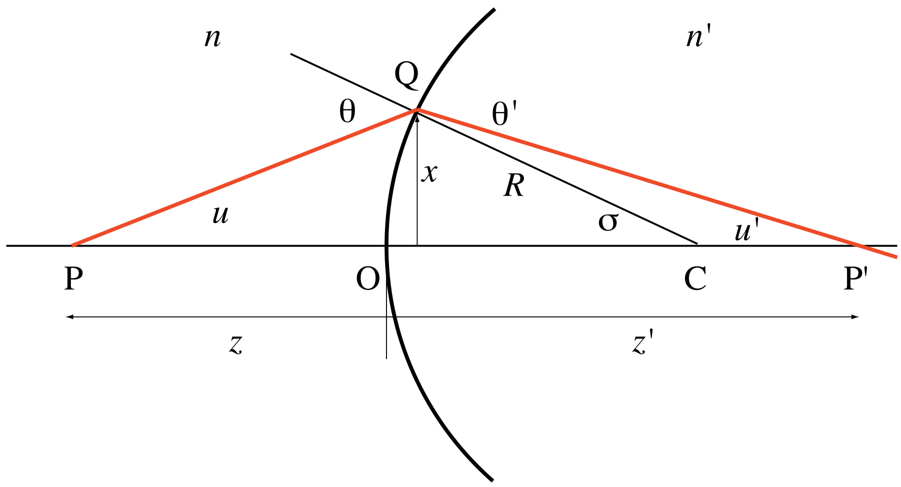


図 16　単一球面による屈折

なお，式 (36) に $u = -x/z$ と $u' = -x/z'$ を代入すると，単一球面による結像関係式

$$\frac{n'}{z'} - \frac{n}{z} = P \tag{38}$$

が得られる。

A.3 フェルマーの原理による説明

単一球面による光線の屈折をフェルマーの原理を用いて導こう。図 16 において，2 点 P と P$'$ は共役であるとする。さて，点 P から点 Q を経て点 P$'$ に至る道の光路長を $L(x)$ とする。フェルマーの原理によれば，点 P から点 P$'$ へ至る道のうち，光路長最小の道が本当に光線がたどる道になる。もしも $L(x)$ が x に依存すれば，ある x で $L(x)$ は最小値をとるから，その x に対応する道が真の光路になる。しかし，これでは点 P と点 P$'$ を結ぶ光線は 1 本しかないことになり，2 点が共役であるとは言えない。2 点が共役であれば，点 P から出た光線は，どの方向に出ても全て点 P$'$ に到達するからである。よって，**光路長 $L(x)$ は x に依存しない**。

実際に計算しよう。点 P の座標は $(0, z)$，点 P$'$ の座標は $(0, z')$ である。点 Q の座標は，x が十分小さいとき $(x, x^2/2R)$ となる。よって，光路長 $L(x)$ は

$$\begin{aligned} L(x) &= n\sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{2R} - z\right)^2} + n'\sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{2R} - z'\right)^2} \\ &\approx n\sqrt{z^2 + \left(1 - \frac{z}{R}\right)x^2} + n'\sqrt{z'^2 + \left(1 - \frac{z'}{R}\right)x^2} \\ &\approx nz + n'z' + \frac{1}{2}\left[n\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R}\right) - n'\left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R}\right)\right]x^2 + \cdots \end{aligned} \tag{39}$$

となる。光路長は x^2 の関数になっている。近軸光学では，光軸近傍で $L(x)$ を展開したとき x^2 に依存しないことが結像の条件になる。よって，x^2 の項の係数が 0 になる条件

$$n\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{z}\right) = n'\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{z'}\right) \tag{40}$$

が結像条件を与える。これを整理すると，単一球面に対する結像の式 (38) が導かれる。式 (40) の量を **アッベの零不変量** (Abbe's null invariant) とい

う。前に出てきたヘルムホルツ・ラグランジェの不変式 (26) は，光線に沿ってずっと一定値を取るという意味で本当の不変量であるが，アッベの零不変量は面の前後で等しい値をとるが，異る面では異る値を取る。

問題 5　図 16 において，屈折球面への入射角 θ，屈折角 θ' は，近軸光線に対してはそれぞれ $\theta = u - \sigma = x(1/R - 1/z)$，$\theta' = u' - \sigma = x(1/R - 1/z')$ と書ける。よって，近軸光線に対するスネルの法則 ($n\theta = n'\theta'$) から式 (40) が導かれる。以上の事実を確かめよ。

A.4　反射鏡

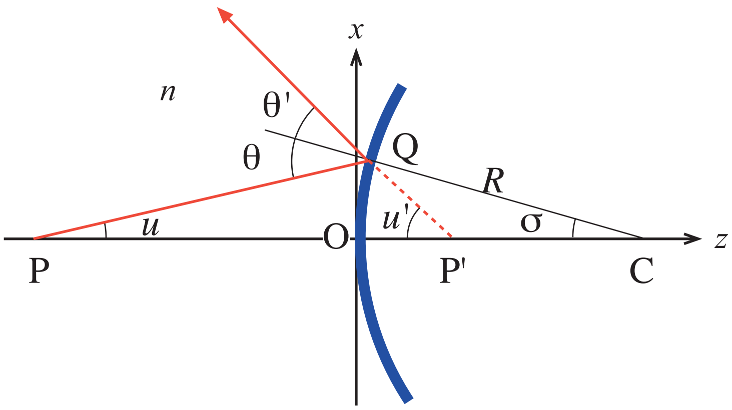


図 17　反射

次に球面鏡による反射を考えよう（図 17）。反射の場合も，入射角および反射角に対し $\theta = u - \sigma$ および $\theta' = u' - \sigma$ の関係式がそのまま成り立つ。よって，反射の法則 $\theta' = -\theta$ より $u' - \sigma = -u + \sigma$ が得られる。ところで，反射光線は z 軸の負の向きに進む。この状態を表すために，屈折率を負にとり，$n' = -n$ とする。これを考慮すると屈折の場合と同じ式 $n'u' = nu - Px$ が成り立つ。ここで，反射鏡のパワー P は

$$P = -\frac{2n}{R} = -2nc \tag{41}$$

で与えられる。この式は，屈折の場合の式 (37) で n' を $-n$ とおいたものと一致する。すなわち，光線が左向きに進むときは屈折率の符号を負にとることにすると，屈折と反射を区別せず，同じ式で扱うことができる。

付録 B　単レンズの焦点距離

前節の議論の応用として，図 3 の単レンズの焦点距離を求めよう。このレンズの光線行列 $\mathbf{M}$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{R}(P_2)\mathbf{T}(d/n)\mathbf{R}(P_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - d_1 P_1/n & d_1/n \\ -P_1 - P_2 + d_1 P_1 P_2/n & 1 - d_1 P_2/n \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{42}$$

となる。ただし，屈折面のパワーは，$P_1 = (n-1)/R_1$，$P_2 = (1-n)/R_2$ である。計算は式 (14) と全く同じである。レンズのパワーは $-M_{21}$ に等しいから

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{(n-1)^2 d}{nR_1R_2} \tag{43}$$

が得られる。厚さ d が十分小さいときは，式 (1) が導かれる。