

# 光学

## 第5章 収差

黒田和男

### 1 はじめに

点光源を結像したときの像を**点像強度分布** (point spread function) という。点像強度分布は、レンズの**収差**と、光の**回折**によって決まる。

一方、顕微鏡やカメラの解像力または分解能 (resolving power) とは、2つの近接する点を分離して結像できる限界、または、等間隔で並ぶ線分を分離して結像できる限界を与える数値である。よって、解像力は、基本的には点像強度分布の拡がりで決まるが、さらに、照明光のコヒーレンス (可干渉性) にも依存する。

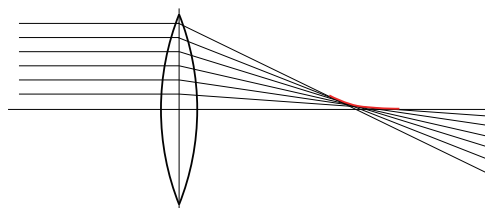


図1 球面収差。赤い線で書いた包絡線は火面

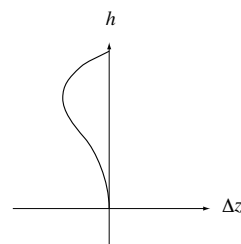


図2 球面収差の縦収差表示

### 2 球面収差

理想的な結像系であれば、一点 (物点) から出た光線はすべて一点 (像点) に集まらなくてはならないが、実際の結像系では、そうはならない。実際の光線の理想像点からのずれを**収差** (aberration) という。

図1は単レンズで光軸に平行な光線を集めたときの、収差の様子を模式的に表したものである。理想的なレンズであれば、光線は全て近軸像点に集まるはずであるが、実際はそうは行かない。図1の場合、入射光線が光軸から離れるほど、射出光線は理想的な像点より少しレンズ側の点で、光軸と交わる。これを**球面収差** (spherical aberration) という。光線の高さを  $h$ 、理想像点から射出光線が光軸と交わる点までの距離を  $\Delta z$  とする。球面収差は、縦軸に  $h$ 、横軸に  $\Delta z$  をプロットした図で表す (図2)。

図3は球を半分にした半球レンズの光線追跡図である。明らかに凸平半球レンズの方が球面収差は小さい。これは、平凸レンズの場合、前面では光線は屈折せず、後面でのみ屈折するため、屈折角が大きいのにに対し、凸平レンズでは前面と後面の両方で屈折するから、1回あたりの屈折角が小さくて済むからである。

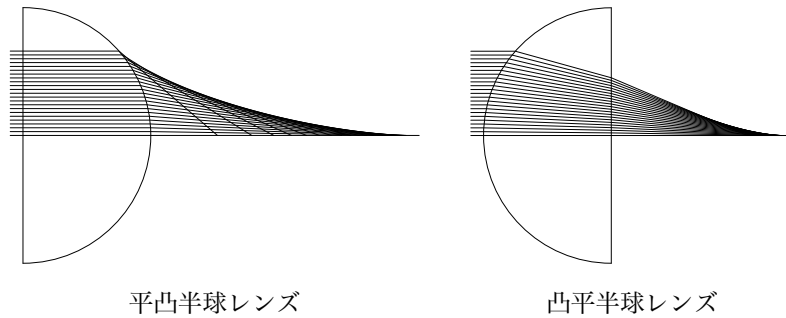


図3 半球レンズの光線追跡。

### 3 完全結像

#### 3.1 デカルトの卵形面

球面収差は、面が球面であるから発生する収差で、面を非球面にすれば球面収差のない結像が実現できる。また、球面でも多数の面を組み合わせることにより、球面収差の量を減らすことができる。

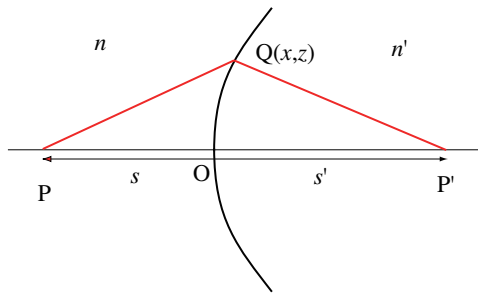


図4 非球面形状の決定

無収差結像を実現する非球面形状は、フェルマーの原理を使って計算する。図4のように、屈折率  $n$  の空間と屈折率  $n'$  の空間が一つの曲面  $Q(x, z)$  で仕切られているとする。光線は曲面  $Q$  で屈折する。無収差系であれば、物点  $P$  を出た光線はどの方向に出ても像点  $P'$  に到達する。フェルマーの原理によると、2点を結ぶ道で経過時間（光路長）を最小とする道が実際に光線がたどる軌跡を与えるのであった。ということは、物点  $P$  から像点  $P'$  に至る光線の光路長はすべて同じでなくてはならない。もしも、光路長に差があれば、フェルマーの原理により、光路長の長い方は真の光路ではないからである。よって、すべての光路長が等しいという条件で、非球面形状を計算することができる。具体的には次のような計算をすればよい。

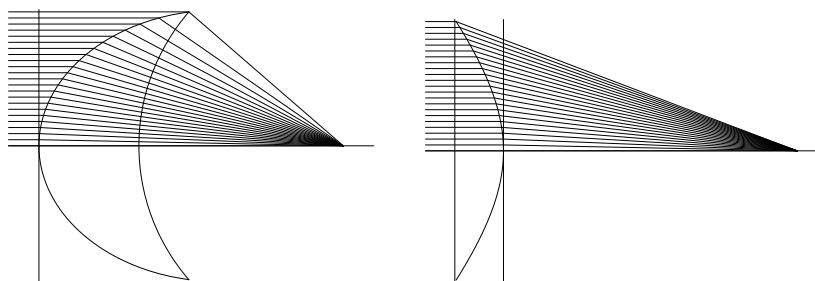
光軸を  $z$  軸にとり、それに垂直に  $x$  軸をとる。面と光軸の交点  $O$  を原点とし、物点  $P(0, s)$ 、像点  $P'(0, s')$ 、面上の点を  $Q(x, z)$  とする。物体側空間の屈折率を  $n$ 、像側空間の屈折率を  $n'$  とする。光軸を通る光線の光路長  $L_0$  は

$$L_0 = -ns + n's' \quad (1)$$

である\*1。一方、光路  $PQP'$  の光路長  $L$  は

$$L = -ns\sqrt{(1-z/s)^2 + x^2/s^2} + n's'\sqrt{(1-z/s')^2 + x^2/s'^2} \quad (2)$$

で与えられる。上の2式を等しいと置けば ( $L = L_0$ )、面形状が得られる。式(2)には二つの平方根があるから、これらの平方根を開くためには二度2乗する必要がある。従って、面は、4次関数で表される曲面になる。これをデカルトの卵型面 (Cartesian oval) という。特に、物点が無限に遠くにあるときは、2次関数で表される。図5右図は  $n < n'$  の場合で、第1面の屈折面は回転楕円面になる。第2面は焦点を中心を持つ球面で、焦点に向かう光線は球面では屈折されずまっすぐ焦点に向かって進む。同左図は  $n > n'$  の場合で、第2面の屈折面は回転双曲面である。第1面は平面で、入射光線は屈折されずに進む。ところが、これらのレンズはほとんど役に立たない。なぜなら、平行光線が光軸に対し傾いて入射すると、途端に収差 (主にコマ収差) が増えるからである。コマ収差の節で、放物面鏡と球面鏡の比較をする。



回転楕円面と球面からなるレンズ      平面と回転双曲面からなるレンズ

図5 球面収差のない片面非球面レンズ

**問題 1** 物点が無限遠にあり ( $s \rightarrow \infty$ )、平行光線が入射するときは、光軸に垂直な平面が波面 (等位相面) になる。従って、光路長は平面上の点から測ればよい。平面はどこにとってもよいから、原点  $O$  を通り面を基準の平面とする。よって、光路長  $L$  は式(2)の代わりに  $L = nz + n'\sqrt{(s'-z)^2 + x^2}$  となる。このことを確かめよ。

### 3.2 不遊点

光路長  $L_0 = 0$ 、すなわち、 $n's' = ns$  の場合にも、デカルトの卵型面は2次曲面になる。実際にはこの場合は球面になる (図6)。この場合の結像点を**不遊点** (aplanatic point) という。この結像の重要なところは、屈折面が球面であるから、同心球面上で無収差の結像が実現することである。前に述べた回転楕円面や回転双曲面、あるいは、一般にデカルトの卵形面では、収差なしで結像できるのは1点だけである。この点から少しでも外れると、急に収差は増大する。ところが、不遊点結像では、球面から球面へ無収差結像が成り立つのである。たとえ、物体面や像面は平面ではなく球面であるとしても、面から面へ収差のない結像が実現することは重要である。収差の観点からは、不遊点は球面収差と次節に述べるコマ収差が同時に補正された結像を実現したと言える。

\*1 図4で  $s < 0$  となることに注意。

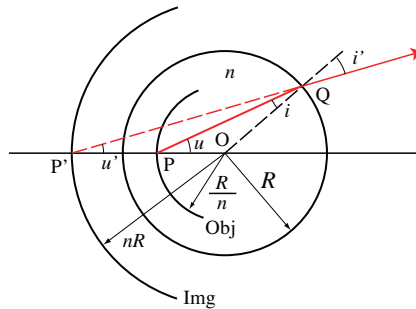


図6 不遊点

不遊点を応用する上で、一つの制約条件となるのは、虚像しか得られないことである。光線を1点に集める実像形成が実現できればさらに有用なのであるが、これはできない。とはいえ、図6から分かる通り、物体側の光線の角度に対し、像側の光線の角度が小さくなっている。よって、不遊点結像を用いると、光線束の開き角を小さくできる。言い換えると、光学系の開口数 (NA) を小さくできるのである。レンズの開口数が大きいほど、収差補正は難しくなるから、開口数を小さくすることにより、その後の光学系の負担を軽くすることができる。このような理由で、顕微鏡の対物レンズの一部に応用されている。

## 4 コマ収差

球面収差のない結像系で問題が解決かという点、全くそうはいかない。回転楕円面レンズや回転双曲面レンズでは軸上物点は確かに無収差で結像されるが、光軸からはずれた物点に対しては、結像特性は著しく劣化するからである。すなわち、上の例にあげた光学系で2次元画像を結像すると、中心の狭い領域だけがシャープに結像され、その周りにはぼけてしまうのである。言い換えれば視野の狭い結像系になってしまうのである。

図7に放物面鏡と球面鏡の比較を載せる。図7左図は、放物面鏡に光軸に平行な光束が入射したときの結像光束を表す。ただし、図を見やすくするため、入射光束は主光線のみを赤色の直線で表し、その他の光線は省略してある。放物面鏡では、球面収差は完全に補正されるから、全ての光線は焦点に集まる。図7中図は、光軸に対し入射光線が  $\tan \theta = 0.1$  だけ傾いたときの結像光束である。結像光束は、主光線の外側に散らばる。これはコマ収差と非点収差によるものである。一方、図7右図は球面鏡の場合で、球面収差があるため結像光束は一点に集まらない。しかし、球面は回転対称だから、入射光束が傾いても、結像光束は回転するだけで、収差は変わらない。

**コマ収差** (coma) は軸外の物点に対して発生する収差の一つである。コマ収差のある光学系の点像強度分布は近軸像点から離れると、スポットの形は三角形に広がった形をとる (図8)。コマ収差の残る光学系では、広い視野をとることは出来ない。カメラや顕微鏡のように画面全体で良好な像を得るためには、球面収差とコマ収差を極力除去することが絶対の条件となる。

図9は、薄い単レンズに対する球面収差とコマ収差の大きさ (係数) を、レンズのベンディングを変えてプロットした図である。この図から、平行光線を集光するときは、凸平レンズが優れていることがわかる。図3で図形的に示した結果が、裏打ちされた。

CD や DVD など光ディスクの光学系では、球面収差とコマ収差を除去した非球面単レンズが使われている。光ディスクのピックアップはトラッキング機構により、読み出したいピットを常にレンズの中央で捕らえるか

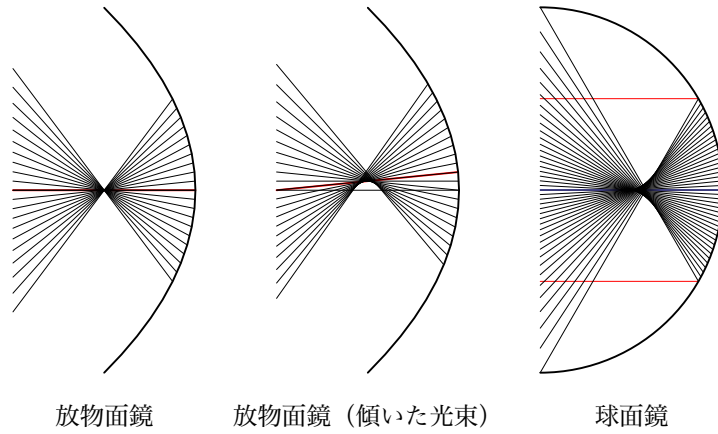


図7 放物面鏡と球面鏡の比較

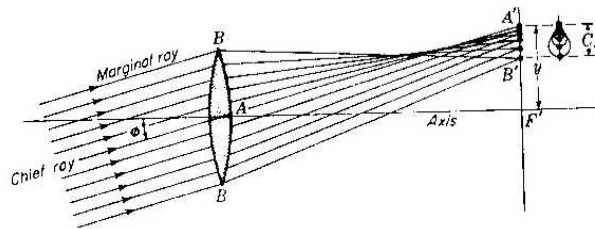


図8 コマ収差

ら、通常の顕微鏡に比べると視野は大きくない。よって、球面収差のみを除去すればよいと思うかもしれないが、しかし、コマ収差を除去することにより、ディスクの横ずれや傾きの影響を低く抑えることが出来る。

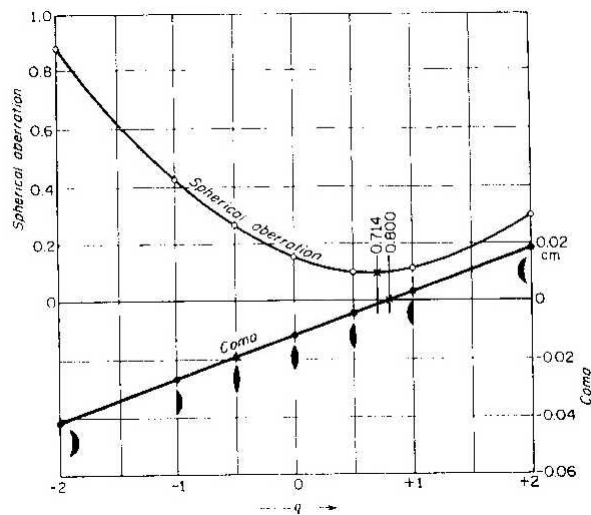


図9 薄い単レンズの球面収差とコマ収差

## 5 正弦条件

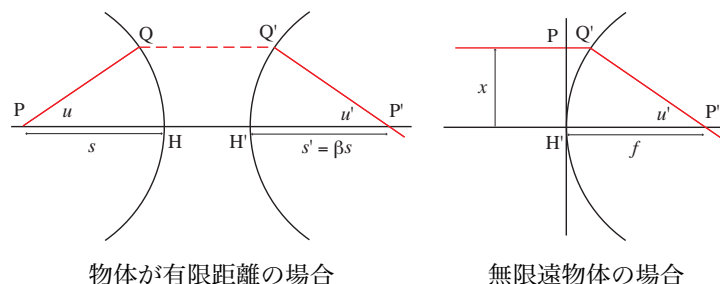


図 10 正弦条件

光軸上の結像に球面収差がないときに、コマ収差も同時になくなる条件を**アッベの正弦条件** (Abbe's sine condition) という。正弦条件とは、図 10 において、光軸上の物点から出る光線の傾きを  $u$ 、像点を通る光線の傾きを  $u'$ 、近軸光学で決まる横倍率を  $\beta$  とすると

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \beta \quad (3)$$

満たすことをいう\*2。この結果は次のような簡単な図形的解釈を持つ。図 6 右図において、 $H$  と  $H'$  はそれぞれ物体側の主点、像側の主点とする。物点の物体側主点からの距離を  $s$ 、像点の像側主点からの距離を  $s'$  とすると、 $s' = \beta s$  が成り立つ。さて、物体空間に物点  $P$  点を中心に主点  $H$  を通る球面を描く。同様に、像空間にも、像点  $P'$  を中心に主点  $H'$  を通る球面を描く。光線がこれらの球面と交わる点を、それぞれ、 $Q, Q'$  とする。 $Q$  点の光軸からの高さは  $|s \sin u|$  に等しい。同様に  $Q'$  点の高さは  $|s' \sin u'|$  に等しい。正弦条件 (3) は、この 2 点の高さが等しいことを意味する。近軸光学における主点の定義は、横倍率が 1 の共役点、つまり、高さが等しくなる点である。よって、正弦条件を満足する光学系では、近軸から離れた場合でも、「主平面」の代わりに「主球面」をとれば、主球面を通過する光線の高さが等しくなるのである。

**問題 2** 物点が無限遠にあるとき、入射光線は光軸に平行な光線になる。この光線の高さを  $x$ 、レンズの焦点距離を  $f$ 、射出光線が光軸をなす角度を  $u'$  とすると、正弦条件は

$$x = -f \sin u' \quad (4)$$

となることを示せ。

これから、正弦条件を満たす光学系では、レンズの大きさ  $D$  は焦点距離の 2 倍を超えられないことが結論できる。 $D = 2f$  のとき F ナンバーは 0.5 であるから、F ナンバーが 0.5 以下のレンズは存在しない。

## 6 波面収差

光学系の収差を総合的に評価する方法として、波面収差の方法がある。これについて簡単に述べよう。

\*2 物体空間、像空間の屈折率が 1 と異なるとき、 $\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta$ 。

## 6.1 波面

平面波や球面波は、**波面** (wavefront) の形で波の伝播を分類する方法である。本来波面とは波動光学的な概念で、波の位相が等しい面 (等位相面) を指す。ところが、光の波長が光学系の典型的なサイズに比べ十分小さいという条件では、波面を幾何光学的に求めることができる。点光源から出た光線束を考えよう。屈折率の一様な空間では点光源から出た波は球面波として伝わる。球面波の波面は点光源から等距離にある点の集まりである。光線がレンズで曲げられると、波面の形は変化する。このときの波面は、点光源から光線に沿って測った光路長 (屈折率 × 距離) が等しい点の集まりである。すなわち、幾何光学的な波面とは、等光路長面のことを指す。

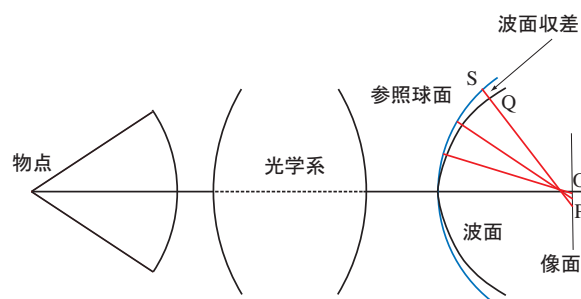


図 11 波面収差

波面と光線の間には次の重要な結果が成り立つ。**波面と光線は直交**する。この事実があるため、光線を追跡するのと、波面を求めるのとは等価である。つまり、光線追跡から光路長を計算し、等光路長面を求めれば波面が計算できる。一方、波面の形状が分かれば、波面上の各点で垂線を立てれば光線が求まる。

## 6.2 波面収差

理想的な光学系を考えよう。点光源から出た光線束は、すべて、一つの物点に収束する。従って、この光学系の像側の空間における波面は、像点を中心とする球面になるはずである。ところが、現実の光学系では収差があるため、像空間で光線束は一点に収束しない。これを波面の言葉で言い換えれば、像空間で波面は球面からズレている。このズレの大きさが収差の大きさを表す。これを**波面収差** (wavefront aberration) という。これに対し、理想的な光学系の波面に対応する球面を**参照球面** (reference sphere) という。波面と参照球面間の光路長を波面収差というのである。図 11 を参照すると、波面収差  $W$  は 2 点  $SQ$  間の光路長で与えられる。つまり、 $W = [SQ]$  である。波面収差は参照球面上の点  $S$  の関数と考えられる。

光線は波面に直交するという事実を用いると、波面収差と横収差 (光線が像面を通過する点と、理想像点との間の距離) の関係を導くことができる。

波面収差を用いると収差を容易に分類できる。つまり、参照球面上の点  $S$  の関数として解析するのである。この考えに基づき、基本的な収差を、球面収差、コマ収差、像面湾曲、非点収差、歪曲の 5 つの種類に分類できる。これをザイデル (Seidel) 収差という。概略を図 12 に示す。

## 付録 A 不遊点結像

図 6 のように物体側の屈折率が  $n$ 、像側の屈折率が  $n' = 1$  の場合の不遊点結像を考える。屈折球面の曲率半径を  $R$  とするとき、物点  $P$  を中心から  $R/n$  の位置におく。頂点からの距離は、符号を考慮して、 $s = -(1 + 1/n)R$  となる。このとき、像点  $P'$  は、中心から  $nR$  の位置、したがって、頂点から測って  $s' = -(1 + n)R = ns$  の位置に形成されることを示そう。物点は光線の角度に依存しないこと、すなわち、結像は無収差であることを確かめる。

図 6 で、物体光線、像光線が光軸となす角度をそれぞれ  $u, u'$ 、屈折点  $Q$  における入射角、屈折角を  $i, i'$  とする。これらはすべて正の量である。さて、三角形  $OPQ$  および  $OP'Q$  に対する正弦定理から

$$\frac{R}{\sin u} = \frac{R}{n \sin i}, \quad \frac{R}{\sin u'} = \frac{\overline{OP'}}{\sin i'} \quad (5)$$

が成り立つ。第 1 式より  $n \sin i = \sin u$  が成り立つ。ところが、スネルの法則から  $n \sin i = \sin i'$  が成り立つから、この二つを比べて  $\sin u = \sin i'$  が成り立つ。これは、 $u = i'$  を意味する。ところが、三角形  $OPQ$  と  $OP'Q$  から、 $u + i = u' + i'$  の関係が成り立つ。よって、 $u' = i$  の関係も成り立つ。さて、式 (5) の第 2 式より

$$\overline{OP'} = R \frac{\sin i'}{\sin u'} = R \frac{\sin i'}{\sin i} = nR \quad (6)$$

が得られる。こうして、像の位置は光線の角度によらないことが確かめられた。

最後に不遊点結像が正弦条件を満たすことを示そう。上の議論より  $\sin u / \sin u'$  が一定値  $n$  をとる。正弦条件は、物体空間と像空間の屈折率が異なるときは、脚注にあるように、 $n \sin u / \sin u' = \beta$  となる。ところが、不遊点結像の横倍率は、球面の中心から測った物体および像までの距離の比に等しい。よって、 $\beta = n^2$  になる。以上の結果から、不遊点結像は正弦条件 (3) を満足することが分かる。

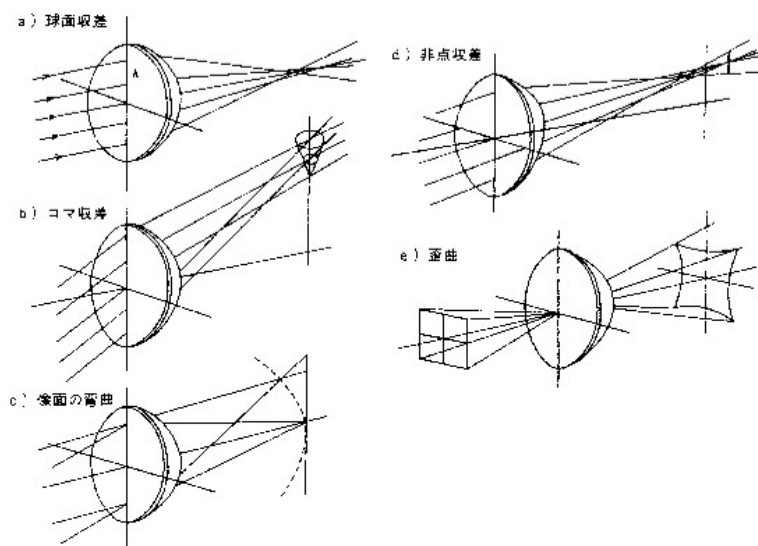


図 12 ザイデル収差



## 付録 B 正弦条件

コマ収差は、図 8 の光路図から分かるように、レンズの中心部分 A を通った光線による像の位置 A' と、周辺部分 B を通った光線による像の位置 B' が異なることによって発生する。そこで、角度によらず倍率が一定なという条件から正弦条件 (3) が導かれることを示そう。

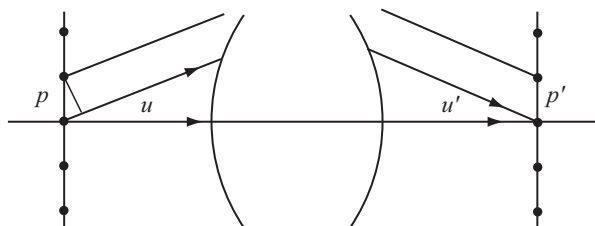


図 13 回折格子の結像

以下の議論は、**結像の本質は干渉**という、結像を考える上で大変重要な原理に基づいている。幾何光学では物体は点でできているとする。しかし、画像は 2 次元的な拡がりを持つから、はじめから 2 次元物体を考えた方がよい。最も簡単な 2 次元物体として、透過率が周期的に変化する物体、すなわち回折格子を考える。図 13 のようにピッチ  $p$  の回折格子に、光軸に平行な光が入ったときの回折角  $u$  は

$$p \sin u = m\lambda \quad (7)$$

で与えられる。ここで、 $\lambda$  は光の波長、 $m$  は回折の次数である。以下では  $m = 1$  の場合を考える。透過型の回折格子を物体とし、光軸に平行な光線で照明する。回折格子を透過した光は、回折されずそのまま光軸に平行に進む 0 次光と、角度  $u$  方向に回折される 1 次光に分かれる。光学系を通過して出てきた 1 次光が光軸となす角度を  $u'$  とする。0 次光と 1 次光は干渉し、像面上に干渉縞を作る。この干渉縞のピッチ  $p'$  は、本質的に式 (7) と同じで、 $p' \sin u' = \lambda'$  を満たす。さて、理想的な結像が成り立つためには少なくとも次の二つの条件を満たす必要がある。

1. 光軸上の像点の位置で干渉縞の位相が合わなくてはならない。そのためには、0 次光と 1 次光の位相が等しいことが必要である。これは、フェルマーの原理より、光軸上の結像が無収差であること、すなわち、球面収差がないことを意味する。
2. 横倍率は

$$\beta = \frac{p'}{p} = \frac{\lambda' \sin u}{\lambda \sin u'} = \frac{n \sin u}{n' \sin u'} \quad (8)$$

となる。ただし、 $n, n'$  は物体空間および像空間の屈折率である。角度  $u$  がどんな値を取っても、横倍率  $\beta$  が変化しない条件、それが正弦条件に他ならない。