

光学

第6章 回折と分解能

黒田和男

1 はじめに

無収差レンズでは、点光源から出たすべての光線は像点に収束し、幾何光学的なスポット径は0になる。もちろん、実際のスポットは点にはならず拡がりを持つ。無収差レンズのスポットの拡がり、光の回折効果による。

回折 (diffraction) とは波全般に見られる現象で、幾何光学的な影の部分に波が回り込む現象である。例えば、障害物の後ろでも話声（音波）やラジオ（電波）を聞くことができるのは、波の一部が、反射や回折をするからである。

光は波長が短いから、日常生活で回折現象を直接実感することはまずない。物体の影の縁がぼけるのは、照明する光源が広がっているからであって、光の回折が見えているわけではない。このように、通常は姿を見せないが、焦点の周りのように、波長程度の距離で強度が大きく変わるところでは、回折の効果が無視できなくなる。ここでは、焦点近傍の回折による光の強度分布を考える。

2 回折

図1は、水面の波を使って、回折を可視化した写真である。開口の径を D 、波の波長を λ とすると、回折による拡がり角 θ は波長に比例し口径に反比例し、次のように与えられる。

$$\theta \approx \frac{\lambda}{D} \quad (1)$$

平面波は進行方向が定まった波であるが、無限に広がっているから、狭い開口をそのまま通過することはできない。開口により波の空間的な拡がりが D に制限され、その代償として、伝搬方向が拡がると考える。回

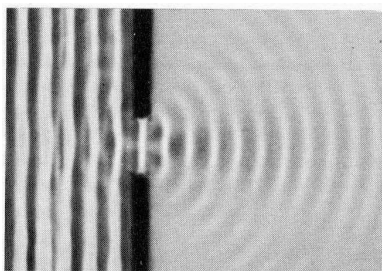


図1 水面の波の回折

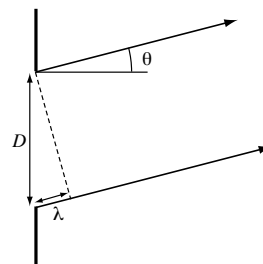


図2 エッジ回折波の干渉

折角は、開口のエッジで回折された光が干渉により強め合う方向で与えられるとしよう。図 2 に示すように、 $D \sin \theta = \lambda$ を満たす方向が干渉により強め合う。 θ が十分小さく、 $\sin \theta \approx \theta$ と近似できれば式 (1) が導かれる。

開口の直後に焦点距離 f のレンズを置いたとしよう。回折による角度拡がり θ のため、焦点の周りの光の強度分布はおおよそ $f\theta$ だけ拡がる。これが回折によるスポット径の拡がり s を与える。

$$s \approx \frac{f\lambda}{D} = \lambda F \quad (2)$$

ただし、 $F = f/D$ は、レンズの F 値 (口径比) である。第 4 章で述べた開口数 NA と F 値の関係は $NA = 1/2F$ で与えられる。よって、スポット拡がり s を NA で表すと

$$s \approx 0.5 \frac{\lambda}{NA} \quad (3)$$

となる。結局、レンズが無収差であれば、口径が大きく F ナンバーが小さいほど、あるいは、開口数が大きいほど、スポット径は小さくなり、解像力は向上する。式 (3) をレンズの**回折限界** (diffraction limit) という。もちろん収差が残存すれば、実際のスポット径はこれより大きくなる。

詳しい解析によると、回折限界 s は

$$s = \kappa \frac{\lambda}{NA} \quad (4)$$

と書ける。ここで κ は結像の条件に依存する係数で、0.5 から 1 程度の数値をとる。

では、解像力はどこまでも高くなるのであろうか。瞳の周辺光線が光軸となす角度を θ_m とすると、開口数は $NA = \sin \theta_m$ であるから、最大でも 1 である。従って、式 (4) で $\kappa = 1$ とし、解像できる限界は波長程度までである。波の性質から、波長より細かい構造を見るのは不可能なのである。

レンズの解像力を上げるためには、収差は全部補正できたとして、 NA を大きくすること、波長を短くすることが必要である。

3 干渉縞と回折拡がり

波動光学では、レンズによる結像をレンズを通過した波が干渉する結果、像が形成されると考える。この立場からは、**最も細かい干渉縞がレンズの解像限界**を決める。そこで、図 2 とは違う観点から、2 光波の干渉を考察しよう。波長 λ の二つの平面波を干渉させる。図 3 のように、平面波の波動ベクトルは xz 面内にあり、それぞれ、 z 軸に対し $\pm\theta$ 傾いているとする。波動関数は、それぞれ、 $A \exp[-ik(x \sin \theta + z \cos \theta)]$ と $A \exp[-ik(-x \sin \theta + z \cos \theta)]$ になる。ただし、 $k = 2\pi/\lambda$ である。この 2 つの平面波が干渉したときに、干渉縞は x 方向にでき、強度分布は

$$\begin{aligned} I(x) &= \left| A e^{-ik(x \sin \theta + z \cos \theta)} + A e^{-ik(-x \sin \theta + z \cos \theta)} \right|^2 \\ &= 2A^2 [1 + \cos(2kx \sin \theta)] \end{aligned} \quad (5)$$

となる。よって、干渉縞の間隔 Λ は

$$\Lambda = \frac{\pi}{k \sin \theta} = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \quad (6)$$

で与えられる。

レンズの焦点では、多数の平面波が干渉することによりスポットが形成される。今、結像レンズの最外縁光線が光軸となす角を θ_m としよう。このレンズの開口数は $NA = \sin \theta_m$ である。よって、このレンズで生じ

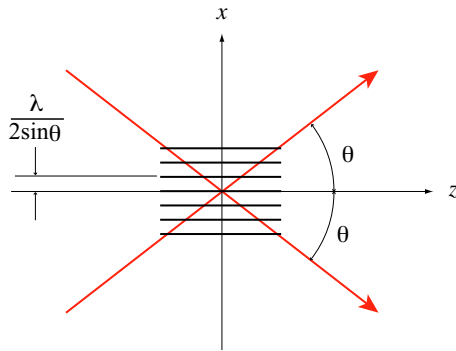


図3 二つの平面波の干渉

る干渉縞間隔の一番細かい値は、式(6)において $\theta = \theta_m$ としたときに得られる。これが干渉縞間隔の最小値であるから、回折限界 s はこの値より小さくなることはない。よって、回折限界は

$$s = \frac{\lambda}{2 \sin \theta_m} = \frac{\lambda}{2NA} \quad (7)$$

で与えられる。これが、像形成を光の干渉という立場から見たときの、回折限界の説明である。

4 焦点近傍の回折光強度分布

無収差レンズの焦点近傍の強度分布は、付録Aの式(10)で計算できる。この式から、像面上の回折像の振幅分布は付録Bの式(19)で与えられる。図4は像面上の振幅分布および強度分布を表すグラフ、図5は像面上の強度分布をとった写真である。この無収差光学系による像面上の強度分布をエアリー(Airy)の回折像といい、中心の円形の明るい部分をエアリーディスクという。エアリーディスクの半径は付録Bの式(20)で与えられる。

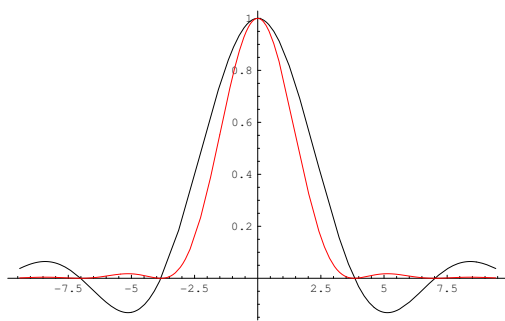


図4 関数 $2J_1(x)/x$ とその2乗

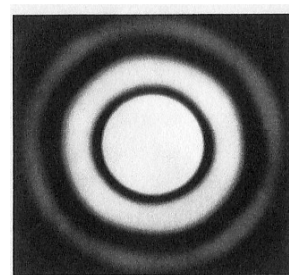


図5 エアリーの回折像

図6は、開口数 $NA = 0.8$ のときの、光軸を含む断面上における強度分布を表す等高線図である。横軸は光軸に平行で、縦軸は光軸に直交する方向であるが、縦軸横軸それぞれ別々に規格化をして、全体がバランスよく収まるようにした。したがって、実寸とは異なる。図の原点が近軸像点で、レンズは左側にある。強度は中心で1となるように規格化した。等高線の間隔は、図の中央の楕円形の領域の内部では0.1、その外では0.01にとった。図中の原点で交差する2直線は、幾何光学的な周辺光線である。

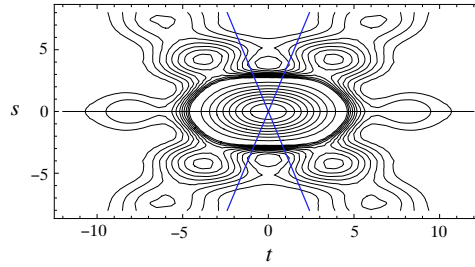


図6 焦点近傍の強度分布 ($NA = 0.8$)

5 光学系の分解能

顕微鏡の分解能は、レンズの収差、回折、および、照明光のコヒーレンス (可干渉性) で決まる。収差はないとしよう。回折による拡がりには、式 (4) で与えられる。ただし、 NA は顕微鏡対物レンズの開口数である。コヒーレンスが関係するのは、次のような事情による。分解能の定義は、近接する 2 点、または 2 本の線分が光学系を通した後、正しく解像されるかにある。そのときに、2 点からでる光が干渉するか否かで、結果は大きく異なる。もしも 2 点がコヒーレントであれば、振幅の和を考えなくてはならない。一方、干渉しない場合は (これをインコヒーレントという)、強度の和を考えることになる。一般には、インコヒーレントの方がコヒーレントの場合より高い分解能が得られる。図 7 は、付録 B の円形レンズによる回折像の最初の暗環の半径

$$\delta = 0.61 \frac{\lambda}{NA} = 3.83 \frac{1}{k \sin \theta_m} \quad (8)$$

だけ 2 点を離して置いたときの強度分布である。ただし、2 点の照明はインコヒーレントであるとしている。また、図の横軸は $1/k \sin \theta_m$ で規格化してある。図 8 はこの場合の像の等高線図である。式 (8) をレーリー (Reyleigh) の解像限界という。

望遠鏡の場合も基本的に同じである。望遠鏡の場合は、物体は常にインコヒーレントである。レーリーの解像限界が望遠鏡に対しても成り立つ。ただし、望遠鏡の場合は、2 点間の距離は角度で測られる。角度に換算すると

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (9)$$

で与えられる。ここで D は対物レンズの口径である。

付録 A 無収差レンズの焦点近傍の強度分布

無収差レンズを仮定し、焦点の近くにおける光の振幅分布を計算しよう。図 9 のように、焦点を原点にとり、光軸を z 軸にとり、それに垂直な像面上に xy 軸をとる。無収差レンズであるからすべての光線は原点を通過する。

さて、図 9 のような幾何光学的な記述から、波動光学的な結論を引き出すのはどうしたらよいだろうか。正統的には、光波の伝搬を波動方程式を解いて求める必要がある。しかし、これを実行するのは大変である。ここでは、厳密さを欠くが、直感的な方法で波動の伝搬を求めよう。具体的には、**一本の光線に一つの平面波**を対応させるのである。つまり、単位ベクトル t の方向に進む光線に対し、波動ベクトル $k = kt$ の平面波

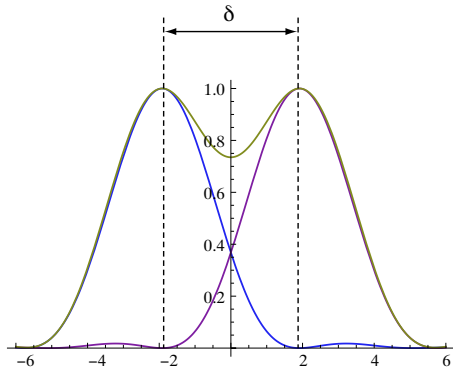


図7 レイリーの解像限界

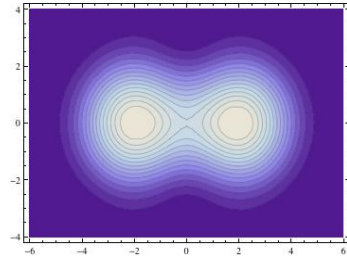


図8 等高線図

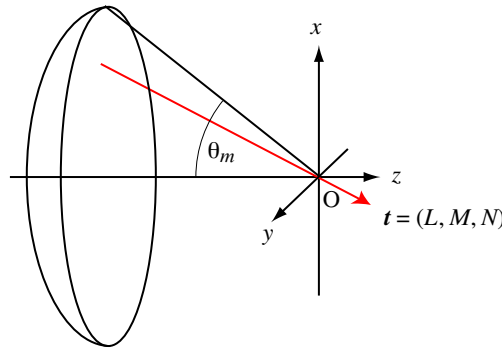


図9 点像の形成

$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ を対応させる。ただし、 $k = 2\pi/\lambda$ である。焦点の周りには無数の光線が集まるが、波動光学的には、対応する平面波が干渉して、スポットを形成する。干渉するからには位相差が非常に重要になるが、無収差レンズであれば、物点から像点に至るすべての光線の光路長は等しいから、すべて平面波は原点（像点）で同位相で重なる。波面収差がある場合は、波面収差の分だけ位相ズレした平面波が干渉すると考えるが、ここでは、これ以上立ち入らない。ベクトルの方向を θ, ϕ で極座標表示すると、光線の方向を示す単位ベクトルは $\mathbf{t} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ になる。極座標の積分要素は立体角 Ω を用いて $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ となることを注意しよう。こうして、原点の周りにおける光の複素振幅 $u(\mathbf{r})$ は

$$u(\mathbf{r}) = \iint w(\theta, \phi) e^{-ik(x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi + z \cos \theta)} \sin \theta d\theta d\phi \quad (10)$$

と書ける。ただし、 $w(\theta, \phi)$ は各光線の寄与を表す重み関数である。ここで、 z は像面からの距離、つまり、ピントのボケ具合を意味する。 $z = 0$ がピントの合った状態である。

最後に重み関数の決定が残っている。球対称な光学系であれば、光線の重みは単位立体角当りに均一に分布していると考えてよいだろう。従って、重み関数 $w(\theta, \phi)$ は一定値をとる。これが一つの考え方であるが、しかし現実の光学系は球対称ではない。通常の光学系は面から面への結像を実現するものである。従って、像面に対して傾いて入射する光線の寄与は、垂直に入射する光線よりも小さいと考えられる。詳しい解析によると、その寄与は入射角の余弦関数、すなわち、 $w(\theta, \phi) = A \cos \theta$ で与えられる。ここで A は定数である。

これで計算ができるようになったが、通常の円形のレンズの場合にこの計算を実行するにはベッセル関数の

知識が必要になる。次節に計算の詳細を記述するが、ここでは長方形のレンズを仮定する。長方形のレンズであれば、初等関数を用いて計算を実行できる。

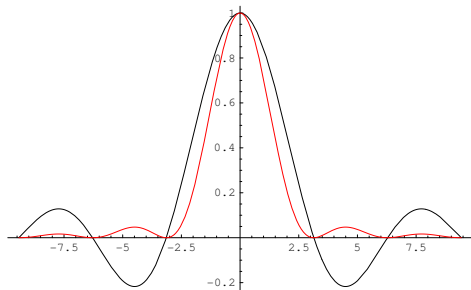


図 10 関数 $\text{sinc}(x)$ とその 2 乗

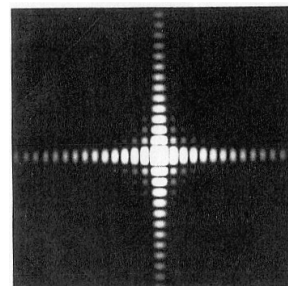


図 11 正方形レンズによる回折像

像面上の光の複素振幅分布を考えることにし、 $z = 0$ とおく。レンズが長方形であるから、極座標 θ, ϕ の代わりに、 xy 座標を用いた方がよい。このため、 xy 方向の方向余弦 $L = \sin \theta \cos \phi$, $M = \sin \theta \sin \phi$ を積分変数にとる。面積要素を計算すると $dLdM = \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$ となる。これは、座標変換に伴う面積要素の変換（ヤコビ行列式）は $\partial(L, M)/\partial(\theta, \phi) = \cos \theta \sin \theta$ となることから導かれる。よって、 $w(\theta, \phi) = \cos \theta$ とすると、 $w(\theta, \phi)d\Omega = AdLdM$ となるから、積分 (10) は

$$\begin{aligned} u(x, y) &= A \int_{-L_m}^{L_m} \int_{-M_m}^{M_m} e^{-ik(xL+yM)} dLdM \\ &= u_0 \frac{\sin(kL_mx)}{kL_mx} \frac{\sin(kM_my)}{kM_my} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここで L_m, M_m はそれぞれ長方形レンズの xy 方向の開口数 (NA) であり、 $u_0 = u(0, 0) = 4AL_mM_m$ は原点における振幅である。上式には

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (12)$$

と定義される関数が現れる。これを sinc 関数 (シンク関数) という。図 10 は、sinc 関数とその 2 乗を図示したものである。像の強度分布は sinc 関数の 2 乗に比例する。 x 軸上で強度が最初に 0 になる位置は、 $L_m = NA$ と置いて

$$x = \frac{\lambda}{2NA} \quad (13)$$

与えられる。この式は式 (3) と同じ式である。図 11 は、正方形のレンズ（実際には、円形のレンズに正方形の開口を重ねたもの）によってできた回折像の写真である。

付録 B 円形レンズの回折像

レンズが円形の場合に、像面上 ($z = 0$) における振幅分布を、式 (10) から求めよう。軸対称であるから $x = 0, y = r$ と置いても一般性を失わない。よって、 $w(\theta, \phi) = A \cos \theta$ とおいて

$$u(r) = A \int_0^{\theta_m} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \sin \theta \sin \phi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (14)$$

を計算すればよい。 ϕ の積分には、ベッセル (Bessel) 関数の母関数展開式

$$e^{iz \sin \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\phi} \quad (15)$$

を用いる。ここで、 $J_n(z)$ は n 次のベッセル関数である。被積分関数を展開して、積分を実行すると

$$\begin{aligned} u(r) &= 2\pi A \int_0^{\theta_m} J_0(kr \sin \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi A \int_0^{s_m} J_0(krs) s ds \end{aligned} \quad (16)$$

が得られる。ただし、 $s = \sin \theta$ と変数変換した。また、 J_0 は偶関数であること、すなわち、 $J_0(-z) = J_0(z)$ であることを用いた。積分の上限値 $s_m = \sin \theta_m = NA$ は、この結像光学系の開口数 (NA) である。次に進むには、ベッセル関数の微分公式

$$\frac{d}{dz} z^\nu J_\nu(az) = az^\nu J_{\nu-1}(az) \quad (17)$$

の $\nu = 1$ の場合を利用する。実際 $\nu = 1$ とすると

$$\frac{d}{dz} z J_1(az) = az J_0(az) \quad (18)$$

が成り立つ。これを用いると、積分 (16) は

$$u(r) = u_0 \frac{\lambda}{\pi s_m r} J_1(2\pi s_m r / \lambda) \quad (19)$$

となる。ここで、 $u_0 = u(0) = A\pi s_m^2$ は、原点における振幅である。図 4 に式 (19) に現れる関数 $2J_1(x)/x$ とその 2 乗をプロットする。この回折像をエアリーの回折像という。一例を図 5 に示す。中央の円形部分をエアリーディスクとよぶ。エアリーの回折像の最初の零点は $\delta = 3.83 = 0.61 \times 2\pi$ にある。よって、エアリーの回折像の拡がり、すなわち、エアリーディスクの半径は、 $s_m = NA$ として

$$r = 0.61 \frac{\lambda}{NA} \quad (20)$$

で与えられる。正方形のレンズの場合の式 (13) と比べると、係数がちょっと違っているがほとんど同じだと考えてよい。