光学

第 9 章　偏光と結晶光学

黒田和男

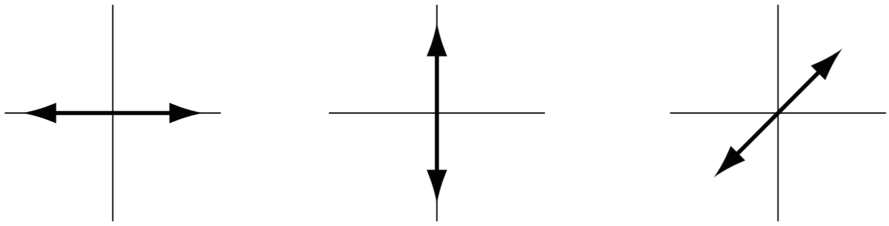
1　偏光

光は横波であるので，振動方向が異なる 2 つの自由度を持つ。このため，光は進行方向に垂直な面内で偏りを持つ。これを**偏光** (polarization) という。

z 軸の正の方向に進む波数 k，角周波数 ω の単色平面波を考えよう。第 1 章で議論した通り，電磁気学の法則によれば，等方的な媒質中を伝わる電磁波は，平面波の進行方向（波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向），電場 $\boldsymbol{E}$ の方向，磁場 $\boldsymbol{H}$ の方向は，互いに直交する。特に電場に着目しよう。一般的な場合，電場は波動ベクトルに垂直な xy 面内で周期運動する。電場ベクトルの尖端が描く図形で，偏光を区別することが出来る。図 1 と図 2 はいくつかの例を挙げたものである。特に，その軌跡が直線状のもの (図 1) を直線偏光 (linear polarization) という。直線偏光を 3 次元的に眺めると，図 3 のように，電場ベクトルは進行方向を含む一定の面内で振動しながら進んで行く。電場と波動ベクトルを含む平面を振動面 (plane of vibration) という[*1]。軌跡が円

[*1] なお，偏光面 (plane of polarization) とは，歴史的には磁場ベクトルが振動する面を指していた。しかし最近の文献では，電場の面を偏光面と呼ぶことが増えている。混乱を避けるため，振動面という言葉がよく使われるようになった。

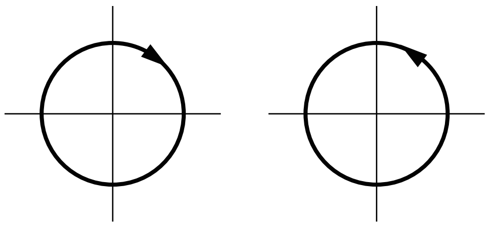
を描くもの (図 2) を円偏光 (circular polarization) という。



$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

x 方向の直線偏光　y 方向の直線偏光　45° 方向の直線偏光

図 1　直線偏光。光は紙面からこちら側に向かって進む。



$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ $\quad$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$

右回り円偏光　左回り円偏光

図 2　円偏光。光は紙面からこちら側に向かって進む。

一般の偏光状態は，x 方向に振動する直線偏光と y 方向に振動する直線偏光の重ね合わせで表すことができる。z 方向に進む平面波を考え，電場の xy 成分を

$$\begin{pmatrix}\mathcal{E}_1\\ \mathcal{E}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1\cos(\omega t - kz)\\ A_2\cos(\omega t - kz + \delta)\end{pmatrix} \tag{1}$$

とベクトル表示しよう。δ は，x 成分と y 成分の間の初期位相の差である。xy 面上のベクトル $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ の尖端が描く軌跡は，振幅 A_1，A_2 および位相

差 δ の大きさで決まる。一般には，図 5 のように尖端の軌跡は楕円を描くので，楕円偏光 (elliptic polarization) という。なお，複素数表示では

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 e^{i\delta} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \tag{2}$$

と書ける。この 2 次元ベクトルを**ジョーンズベクトル** (Jones vector) という。ただし，ジョーンズベクトルは，大きさが 1 の位相因子 ($e^{i\phi}$) だけ不定である。例えば，$(1, i)$ と $(i, -1)$ は同じ偏光状態を表す。

ジョーンズベクトルの大きさの 2 乗 $|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{u} = u_1^* u_1 + u_2^* u_2$ は光の強度を表す。特に偏光状態にだけ着目するときは $|\boldsymbol{u}| = 1$ となるように規格化する。これを規格化ジョーンズベクトル，あるいは，単位ジョーンズベクトルという。図 1 と図 2 のジョーンズベクトルの表示に表れる $1/\sqrt{2}$ は規格化の因子である。また，二つの偏光 $\boldsymbol{u}_j$ が $\boldsymbol{u}_1^* \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$ を満たすとき，これらは直交するという。振動方向の直交する二つの直線偏光は直交する。また，右回り円偏光と左回り円偏光は直交する。

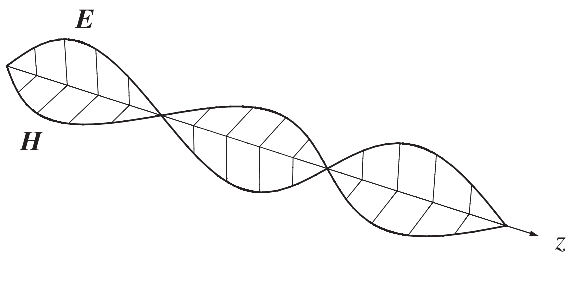


図 3　直線偏光

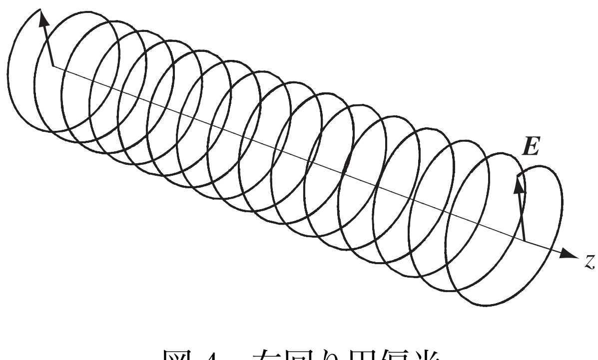


図 4　右回り円偏光

■直線偏光　位相差 δ が 0 または π のとき，すなわち，x 成分と y 成分が同位相または逆位相で振動するとき，直線偏光となる。

■円偏光　A_1 と A_2 が等しく，かつ位相差が $\delta = \pm\pi/2$ のときは，軌跡は円になる。これを円偏光 (circular polarization) という。位相差が $\delta = \pi/2$

のとき，初期位相を適当にとると，光の電場は

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos(\omega t - kz) \\ -A\sin(\omega t - kz) \end{pmatrix} \tag{3}$$

と表わされる。このとき，電場ベクトルは xy 平面内で z 軸の回りを時計回りに回転する。慣習上，これを右回り円偏光と呼ぶ。

■楕円偏光　位相差は $\delta = \pi/2$ であるが，今度は A_1 と A_2 が等しくないとしよう。このときは電場は

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\cos(\omega t - kz) \\ -A_2\sin(\omega t - kz) \end{pmatrix} \tag{4}$$

と書ける。電場ベクトルの先端の軌跡は図 5 のように楕円を描く。これを楕円偏光という。また

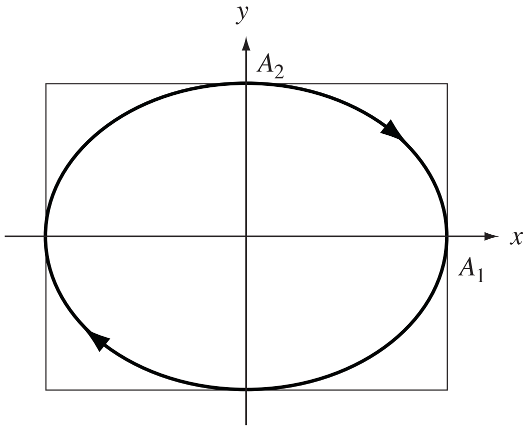


図 5　楕円偏光

$$\tan\chi = \frac{A_2}{A_1} \tag{5}$$

で定義される値を楕円率，角度 χ を楕円率角という。楕円率には符号も含め，正負は左右回転方向に対応する。右回り楕円偏光を正に取る。

2　反射率と透過率

前章で学んだ反射屈折の法則は，境界面に光線が入射したとき，屈折光線や反射光線の方向を与える法則である。それでは，入射した光のうち，どれだけの割合が反射し，どれだけが透過するのだろうか。入射光の強度に対する反射光の強度の比を反射率 R，透過光の強度の比を透過率 T という。反

射率と透過率を求めるためには電磁気学の知識が必要になる。これは本講義の想定する範囲を超えるので，結果を示すに止める。吸収がない場合を考えよう。反射率や透過率は，入射光の偏光に依存する。図 6 に描いたように，境界面の法線ベクトルと入射光線が作る面を入射面という。入射面を基準にして，光（＝電磁波）の電場ベクトルが入射面に垂直な方向に振動する直線偏光を s 偏光という。一方，電場ベクトルが入射面内に含まれる直線偏光を p 偏光という[*2]。反射率と透過率をはじめて求めたのはフレネル (Fresnel) であるので，これらを**フレネルの反射率，透過率**という。

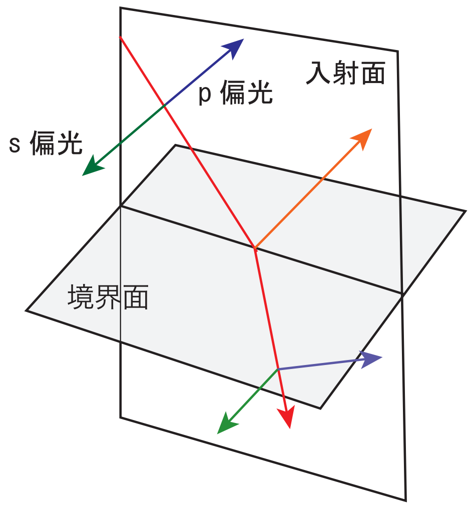


図 6　入射面と s, p 偏光

図 7 は，屈折率が 1.5 のガラスに真空 (空気) 側から入射したときの s 偏光と p 偏光の反射率を，入射角の関数として表したものである。垂直入射（入射角 0）のとき，反射率は $R = (n_2 - n_1)^2/(n_2 + n_1)^2$ で与えられる。よって屈折率が 1.5 のとき，反射率は 4% になる。s 偏光は入射角が大きくなると，反射率も単調に増大し，入射角 90° のすれすれ入射で反射率は 100% になる。一方，p 偏光は，入射角が増えると，はじめは反射率が減少し，やが

[*2] s はドイツ語の垂直を意味する Senkrecht の頭文字で，p は同じく平行を意味する Parallele の頭文字。

て 0 となる。このときの入射角を，偏光角またはブルースター (Brewster) 角という。この角度では p 偏光の反射率は 0 となるから，反射光は完全に偏光した直線偏光になる。この角度の近くでは p 偏光の反射率は非常に小さく，反射光にはほとんど s 偏光成分しか含まれない。

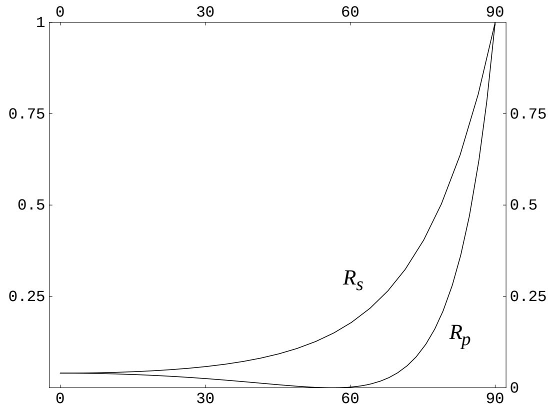


図 7　$n_2/n_1 = 1.5$ のときの反射率

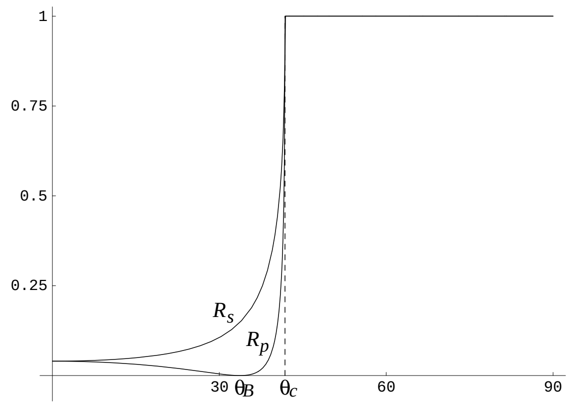


図 8　$n_2/n_1 = 2/3$ のときの反射率

図 8 は，ガラスの側から入射したときの反射率である。この場合もやはり，p 偏光の反射率は一度 0 になり，その後に増大する。ガラスから入射するときは，臨界角を超えると全反射が起きる。すなわち，反射率は 100% に達する。

問題 1　偏光サングラスの原理を述べよ。

2.1　フレネル係数

参考までに，複素振幅に対する反射係数 r と透過係数 t の式を書いておく。導出は省略する。s 偏光に対しては

$$
\begin{aligned}
r_s &= \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \\
t_s &= \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

が成り立つ。p 偏光では

$$
\begin{aligned}
r_p &= \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)} \\
t_p &= \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = \frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

と書ける。これらをフレネル係数 (Fresnel coefficients) という。反射率は $R=|r|^2$ で計算できる。

2.2 全反射

ガラスから空気へ入射する場合，入射角が臨界角を超えると全反射が起こる。このとき反射率は 100% であるから，透過光はない。しかし，電磁場の大きさが境界面直後にいきなり 0 になるわけではない。光の電磁場は空気層へ滲み出すのである。ただし，滲み出した電磁場は空気中を長距離伝わることはできず，境界面から波長程度離れるとほとんど 0 になってしまう。電磁場の大きさは，表面からの距離 z に対し $\exp(-z/\delta)$ の形で減衰する。ただし，δ は滲み出しの深さである。このように減衰する電磁場を**エバネッセント波** (evanescent wave) とよぶ。これは，物質のすぐ近くに局在する場であり，**近接場** (near field) とも呼ばれる。近接場を扱う光学は，通常の光学系では得られない微細な分解能を実現する方法の一つとして注目されている。

3 結晶光学

3.1 複屈折

空気やガラスのように分子が無秩序に分布する媒質中では，特別の方向は存在せず，媒質の屈折率は光の進む方向や偏光には依らず一定である。このような媒質を等方性媒質という。ところが結晶のように，特定の構造を持った分子が規則正しく並んだ媒質中では，屈折率は，光の進む方向や偏光状態

によって異る値をとる。このような媒質を異方性媒質という。屈折率は光の媒質の相互作用によって決まるのであるが，異方性媒質中では，相互作用の大きさが進行方向や偏光によって異るため，方向依存性が発生するのである。

異方性媒質に光が入射すると，屈折光は２つの固有偏光に分解され，それぞれ固有の屈折率で伝搬していく。一般には２つの固有偏光の光線方向は異なるため，結晶を通過すると空間的に分離する。従って，結晶を通して物体を見ると互いに偏光の直交する２重の像が見える。図９は方解石の複屈折をとった写真である。このように結晶が２つの固有偏光状態を持つことに起因する現象を複屈折 (birefringence) という。

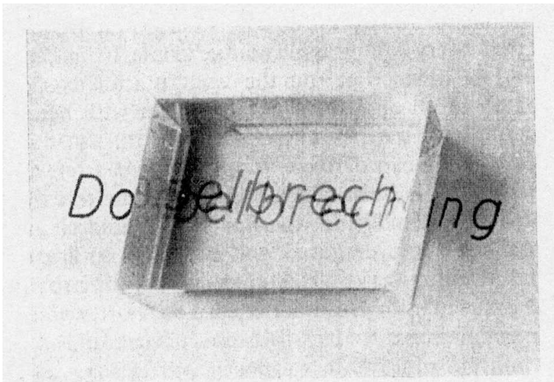


図９　複屈折

3.2　光線速度面とホイヘンスの原理

複屈折の解析は難しいが，概略は次のようにまとめられる。

屈折率は平面波の波面の進む方向（波面法線方向）$\boldsymbol{e}$ に依存する。与えられた波面法線方向 $\boldsymbol{e}$ に対し，２つの固有偏光状態 $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ が存在する。この２つの固有偏光は直交する ($\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2^* = 0$)。旋光性がない場合，固有偏光は直線偏光である。それぞれの固有偏光に対し，屈折率 n_1，n_2 が決まる。$\boldsymbol{e}$ の方向に原点から距離 n_1 と n_2 の点を取る。これをすべての方向にとる

と，２葉の面からなる面ができる。これを屈折率面 (index surface) という。また，$\boldsymbol{n} = n\boldsymbol{e}$ を屈折率ベクトルという。屈折率ベクトルの先端を繋いだ面が屈折率面である。等方性媒質では半径 n の球面である。屈折面の一例を図 12 に示す。

異方性媒質中では，波面の進む方向（波面法線方向，あるいは，位相速度方向という）とエネルギーの進む方向（これを光線速度方向，あるいは，縮めて光線方向という）は一般に一致しない。図 10 のように，位相速度は波面に垂直になるが，光線速度は角度 α だけ傾く。よって，位相速度 v_p と光線速度 v_s の間には $v_p = v_s \cos\alpha$ の関係がある。さらに，波面法線方向が同じであっても，２つの固有偏光に対する光線方向は平行にはならない。すなわち，光線についても２つの固有偏光が存在することになる。そこで，光線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_s$ とし，この方向に進む光線の速度を v_1，v_2 とする。すべての光線に対し，$\boldsymbol{e}_s$ の方向に v_1/c，v_2/c をとった面を光線速度面 (ray surface) という。

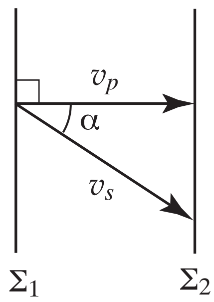


図 10　位相速度と光線速度

原点に置いた点光源がある瞬間に光ったとする。その後，媒質中を拡がって行く光波の先頭面 (pulse front) を考えよう。パルスの伝搬はエネルギーの伝搬を伴うから，先頭面は光線速度で走るはずである。従って，先頭面は光線速度面に相似になる。この意味で，光線速度面を wave surface と呼ぶこともある。

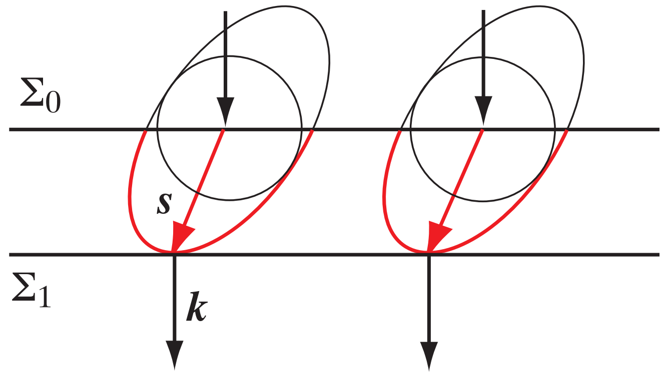


図 11　異常光線の伝搬

ホイヘンスの原理に従えば，波面の伝搬は，２次波の包絡面をとればよい。平面波の伝搬を考えよう。波面は平面である。波面の各点から２次波が出る。前の議論から，この２次波は光線速度面に相似になる。すなわち，波面は光線速度面に接する。あるいは，屈折率ベクトルは波面法線の方向を向いているから，屈折率ベクトルは光線速度面に直交する。図 11 は一軸結晶の異常光線に対するホイヘンスの原理による伝搬の説明である。一軸結晶の異常光線に対する光線速度面は回転楕円体になる。平面波が境界面 Σ_0 に垂直に入射したとする。Σ_0 面で発生する２次波は回転楕円体になる。結晶中を伝搬する異常光線の波面は，２次波に接する面 Σ_1 に一致する。一方，光線，すなわち，エネルギーは図の $\boldsymbol{s}$ の方向に進む。これがホイヘンスの原理による複屈折の説明である。以上まとめて，図中のベクトル $\boldsymbol{n}$ は波面の進む方向を表し，$\boldsymbol{s}$ は光線の進む方向を表す。

3.3　結晶の分類

光学結晶は，光学的等方結晶 (optically isotropic crystal)，一軸結晶 (uniaxial crystal)，二軸結晶 (biaxial crystal) の３通りに分類できる。

光学的等方結晶は，結晶であるが，異方性がない結晶である。光学材料としてよく用いられる蛍石 (CaF_2) や，Si や GAs などの半導体がこの族に属

する。

一軸結晶では，光線は常光線と異常光線に分かれて進む。常光線の屈折率は伝搬方向に依らず一定である。これを N_o とする。異常光線の固有屈折率は伝搬方向に依存する。z 軸と波動ベクトルのなす角度を θ とし，異常光線に対する固有屈折率を $n_e(\theta)$ とすると

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\sin^2\theta}{N_e^2} + \frac{\cos^2\theta}{N_o^2} \tag{8}$$

という関係がある。ここで，N_e は異常光線の屈折率を表す定数で，異常光線主屈折率という。この関係を図示したのが図 12 である。ただし，この図は $N_o > N_e$ の場合で，これを負の一軸結晶という。

常光線の電場は z 軸に垂直な方向を向いている。波面法線が z 軸方向を向いているときは，偏光方向によらず（常光線と異常光線の区別はなくなり），固有屈折率は N_o になる。このような性質を持つ軸を光学軸 (optic axis) という。一方，異常光線の電場は z 軸と波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ が作る面内にある。特に，波動ベクトルが z 軸に垂直で，電場が z 軸方向を向いたとき，屈折率は N_e に等しくなる。この方向で常光線と異常光線の屈折率差は最大になる。

一軸結晶では，光学軸は 1 本で z 軸方向を向いている。一軸結晶の名前の由来はここにある。一軸性結晶としては方解石 (Calcite, $\mathrm{CaCO_3}$) などがある。

付録 A　偏光素子

偏光状態を変える素子を偏光素子という。基本的な偏光素子は，偏光子，旋光子，移相子の 3 つである。

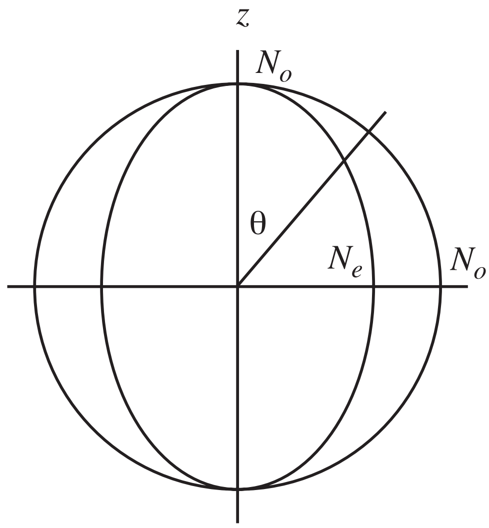


図 12　一軸結晶の波面の伝搬方向と屈折率

A.1　偏光子

特定の方向の直線偏光だけを通す光学素子を偏光子 (polarizer) または偏光板という。x 方向成分だけを通過する偏光板の作用は，ジョーンズベクトルで表して

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

となる。例えば，x 軸に対し θ 傾いた直線偏光が，この偏光板を通過すると，ジョーンズベクトルは

$$\begin{pmatrix} E\cos\theta \\ E\sin\theta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

と変化する。従って，透過光の強度は，透過前の強度を I_0 とすると

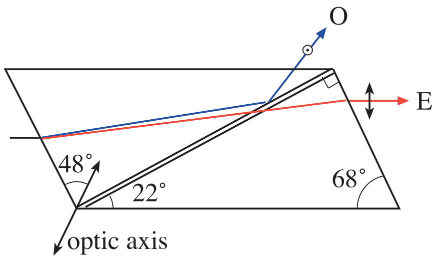
$$I = I_0 \cos^2\theta \tag{10}$$

となる。これをマリュス (Malus) の法則という。

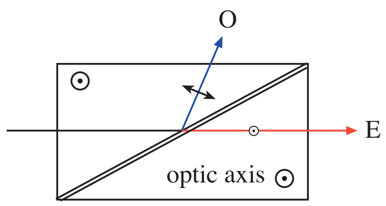
理想的な偏光子では透過方向に垂直な直線偏光の透過率が 0 になるが，現実には完全に 0 にはならない。透過方向の透過率 T_1 とそれに垂直な方向の透過率 T_0 の比，T_1/T_0 を消光比 (extinction ratio) という。

代表的な偏光子には，ポラロイドと複屈折を用いた偏光プリズムがある。ポラロイド[*3]とは高分子に，沃素を含み光を吸収する棒状の分子（結晶）を混ぜ，高分子を延ばして，棒状吸収分子を一定の方向に揃えたものである。棒状吸収分子は，偏光の電場が分子の長軸に平行になるとき光を強く吸収するが，分子の長軸に垂直になるとき，吸収が弱くなる性質を持つ。これを二色性 (dichroism) という。ポラロイドはこの二色性を利用した偏光子である。消光比は数千:1 程度が実現している。

複屈折を利用した偏光子を偏光プリズム (polarizing prism) という。プリズム材料には，方解石がよく用いられる。複屈折により，２つの直線偏光（一軸結晶では，常光線と異常光線）に対し屈折率が異る。このため全反射の臨界角が異ることを利用する。ポラロイドに比べて消光比は高く，10 万:1 程度のものが市販されている。主な偏光プリズムを図 13 にまとめた。



ニコルプリズム



グラン・トムソンプリズム

図 13　偏光プリズム

ニコル (Nicol) プリズムはひし形の方解石結晶を一度カットし，切断面を再び接着剤（カナダバルサム，$n = 1.542$，など）で貼り合わせた構造をし

*3 本来はポラロイド社が開発した偏光子の商標名であるが，一般的に吸収型の偏光子を指すようになった。

ている。接着剤の屈折率は，常光線の屈折率より小さいが，異常光線の屈折率より大きい。従って，常光線に対しては，入射角が大きければ全反射するが，異常光線に対しては全反射は起きない。こうして，常光線（図中の O）は全反射ではねられ，異常光線（図中の E）のみが通過するように，プリズムの角度を設計できる（図中に角度が記入してある）。不要の常光線は側面を黒く塗って吸収する。このようにして，ニコルプリズムは偏光子として機能するが，いくつか欠点がある。その一つは，結晶の面が光軸に対し傾いているため，入射光線と射出光線が平行ではあるが 1 直線上に乗らないことである。このため，光軸を合せるのがむずかしく，また，プリズムの回転に伴い射出光線の光軸が回転してしまう。

この欠点を改良したのが，グラン・トムソン (Glan-Thompson) プリズムである。入射光はプリズム面に垂直に入射する。直角プリズムの光学軸は紙面に垂直にとる。この配置では，結晶から接着面への入射角は常光線と異常光線で同じになるが，屈折率差を利用し，常光線は全反射し，異常光線のみが通過できるようにプリズムの角度を決める。図から明らかなように，射出光線の光軸は入射光線に対しずれることがない。

A.2　旋光子

入射光の偏光状態を変えずに，向きを回転させる素子を旋光子 (rotator) という。例えば 90° の旋光子であれば，x 方向の直線偏光は y 方向の直線偏光に変換される。楕円偏光の場合，楕円の主軸の方向を回転する。円偏光に対しては偏光状態は変化しない。回転の角度を ψ とすると，ジョーンズベクトルに対する作用は

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

と表される。ジョーンズベクトルの変換を表す行列をジョーンズ行列という。ただし，大きさが 1 の位相因子 ($e^{i\phi}$) を全体にかけても，同一の偏光素

子を表す。

右手と左手のように，一方を鏡に映せばもう一方と同じ立体構造をしているが，それ自身は重ねることのできないペアが存在する。これを対掌性 (chirality) という。自然界には，らせん構造をもつ分子が多数存在するが，これも右巻きと左巻きという対掌性を持つ。これらの分子を人工的に合成すると，特別の工夫をしない限り，右巻きと左巻きは等量ずつ生成される。ところが，生体内では，特定の巻き方をしたらせん構造分子のみが作られる。このような分子を含む溶液は，旋光性を示し，直線偏光を入れると振動面が回転する。これは光学活性 (optical activity) とも呼ばれる。代表的な例が砂糖（蔗糖）液である。振動面の回転角から砂糖の濃度を計測することが出来る。

水晶などのように，鏡映に対し対称性を待たない結晶が存在する。これも旋光性を持つ。

A.3 移相子

電場を直交する方向成分，例えば，x 成分と y 成分の間に位相差をつける素子を移相子 (retarder) という。主軸が x, y 方向を向いた，位相遅れ Δ の移相子の作用は

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

と表される。

主軸を xy 軸から ψ だけ回転させた場合はどうなるだろうか。移相子を ψ だけ回転する操作は，移相子は元のままで，入射偏光状態を $-\psi$ 回転し，移相子を通過した後に，偏光状態を ψ 回転して元に戻したのと同じである。偏光状態の回転は旋光子の行列 (11) で表されるから

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

と書ける。

位相遅れが $\Delta = \pi/2 + 2n\pi$ の移相子を 1/4 波長板 (quarter wave plate)，$\Delta = \pi + 2n\pi$ の移相子を半波長板 (half wave plate) という。1/4 波長板は円偏光を直線偏光に変換したり，その逆の作用を持つ。半波長板は，主軸に対し偏光状態の鏡映をとる作用を持つ。例えば，主軸に対し θ の角度傾いた振動面をもつ直線偏光を入射すると，$-\theta$ の角度の直線偏光が出てくる。

移相子としては，複屈折を使うものと，全反射における位相変化を使うものなどがある。厚さが d，屈折率差が $n_1 - n_2$ の複屈折結晶に光を通すと $\Delta = 2\pi(n_1 - n_2)d/\lambda$ だけの位相遅れが生じる。

全反射するとき，反射光に位相変化が生じるが，s 偏光と p 偏光で位相変化の大きさが異る。このことを利用して，移相子を作ることができる。これを，その形状からフレネルの菱面体 (Fresnel rhomb) という。

問題 2　方解石の波長 560 nm における主屈折率は $N_o = 1.66046, N_e = 1.48736$ である。この波長で 1/4 波長板を作るとすると，厚さ d をいくらにとればよいか。

付録 B　ストークスパラメーターとポアンカレ球

偏光の振幅から，次にように定義される量をストークス (Stokes) パラメーターという。

$$\begin{aligned} S_0 &= A_1^2 + A_2^2, \quad S_1 = A_1^2 - A_2^2 \\ S_2 &= 2A_1A_2\cos\delta, \quad S_3 = 2A_1A_2\sin\delta \end{aligned} \tag{14}$$

ただし，A_1, A_2, δ は偏光を表す式 (1) に現れるパラメーターである。ここで，$S_0 = 1$ と規格化すると，$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$ が成り立つから，3 次元空間の点 (S_1, S_2, S_3) は単位球面の上にのる。これをポアンカレ球 (Poincaré sphere) という（図 14)。詳細は省略するが，ポアンカレ球面上の点と偏光状態の対応はつぎの通りである。赤道上の経度 2ψ の点 $(\cos 2\psi, \sin 2\psi, 0)$

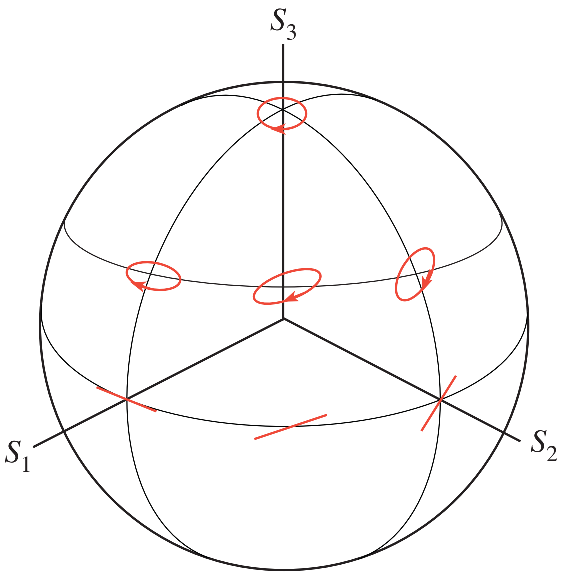


図 14　ポアンカレ球

には，振動面が x 軸に対し ψ 傾いた直線偏光が対応する。経度 $0°$ の点（地球儀上でガーナの南の海上）が x 軸方向の直線偏光，経度 $180°$ の点（日付変更線上）が y 軸方向の直線偏光を表す。赤道を一周すると振動面は $180°$ 回転し元に戻る。北極は右回り円偏光，南極は左回り円偏光に対応する。北極から南極まで子午線をたどると，右回り円偏光→右回り楕円偏光→直線偏光→左回り楕円偏光→左回り円偏光と楕円率が次第に変化する。一般に，経度 2ψ，緯度 2χ の点は，軸が x 軸方向から ψ 傾き，楕円率が χ で与えられる楕円偏光を表わす。楕円偏光の回転の向きは，北半球が右回り，南半球が左回りである。直径の両端の点（対蹠点）は互いに直交する偏光となる。

B.1　偏光子

偏光子は，どのような偏光が入射しても，強制的に特定の偏光状態に変換する素子である。ポアンカレ球上では，特定の点に強制的に移す操作に対応する。

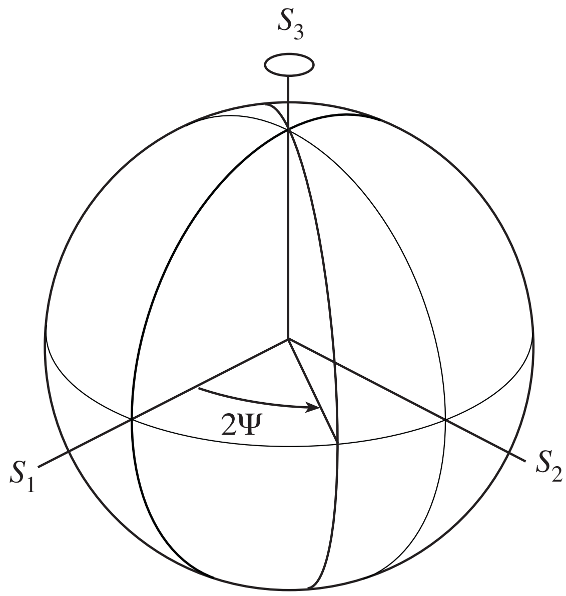


図 15　ポアンカレ球に対する旋光子の作用

B.2　旋光子

偏光状態の角度 Ψ の回転は，偏光の方位角 ψ を $\psi + \Psi$ に変換する操作である。ポアンカレ球に対しては，北極と南極を結ぶ軸の回りの角度 2Ψ の回転に相当する（図 15）。ただし，反時計回りを正にとる。

B.3　移相子

xy 軸を主軸とする位相遅れ Δ の移相子は，偏光の位相差 δ を $\delta - \Delta$ に変換する操作である。これはポアンカレ球の S_1 軸の回りの角度 $-\Delta$ の回転操作に相当する（図 16）。移相子の主軸が xy 軸から ψ だけ回転すると，ポアンカレ球の回転の中心軸は S_1 軸から 2ψ だけ回転する。

以上をまとめると，旋光子や移相子による偏光状態の変換は，ポアンカレ球の回転で表わされることが分かる。例えば，1/4 波長板は赤道面上の直径

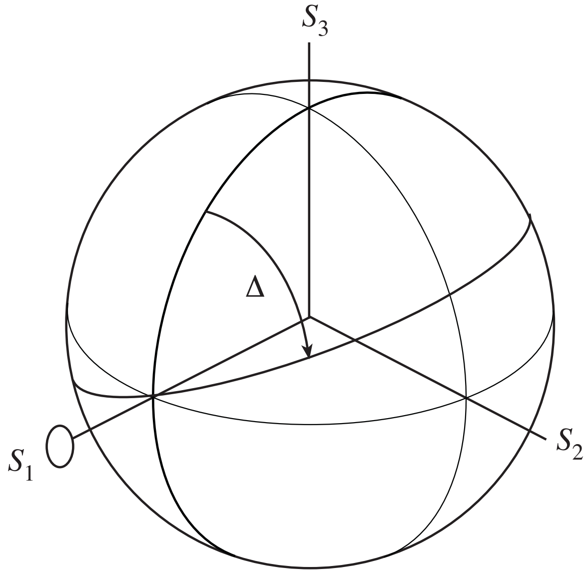


図 16　ポアンカレ球に対する移相子の作用

の回りの 90° の回転操作に対応するから，これにより南極や北極は赤道上に移動する。これは円偏光が直線偏光に変換されることを意味する。また，半波長板は赤道面上の直径の回りの 180° の回転であるから，北半球と南半球が入れ替わることになる。その結果，楕円率は変化しないが，方位角が 90° 回転し，回転の向きが逆転する。

付録 C　屈折率楕円体

固有偏光は屈折率楕円体を用いると直感的に分かりやすい。波面法線を $\boldsymbol{e}$，電磁場の電束密度 $\boldsymbol{D}$ とする。マクスウェル方程式の一つに，電束密度の発散が 0 という式がある[*4]。平面波に対しては，これから $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}=0$ が導かれる。波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ は波面法線の方向を向くから，電束密度は波面法線に垂直になる。

[*4] 一般には電束密度の発散は電荷密度 ρ に等しくなるが，光学では $\rho=0$ である。

ここで電磁場のエネルギー密度 U を考えよう。等方性媒質の場合，電磁気学によれば，エネルギー密度は

$$U = \epsilon|\boldsymbol{E}|^2 = \frac{1}{\epsilon}|\boldsymbol{D}|^2 \propto \frac{1}{n^2}|\boldsymbol{D}|^2 \tag{15}$$

と２次式に書ける。異方性媒質についても，エネルギーを表す式は電場や電束密度の２次式になるが，係数は一定値ではなく，方向に依存する。すなわち一般的に $U = \sum \eta_{jk} D_j D_k$ と書けるはずである。そこで，係数行列を対角化するような座標系をとると

$$U \propto \frac{D_1^2}{N_1^2} + \frac{D_2^2}{N_2^2} + \frac{D_3^2}{N_3^2}$$

と書ける。このときの N_j を主屈折率とよぶ。この主屈折率を用い

$$\frac{x^2}{N_1^2} + \frac{y^2}{N_2^2} + \frac{z^2}{N_3^2} = 1 \tag{16}$$

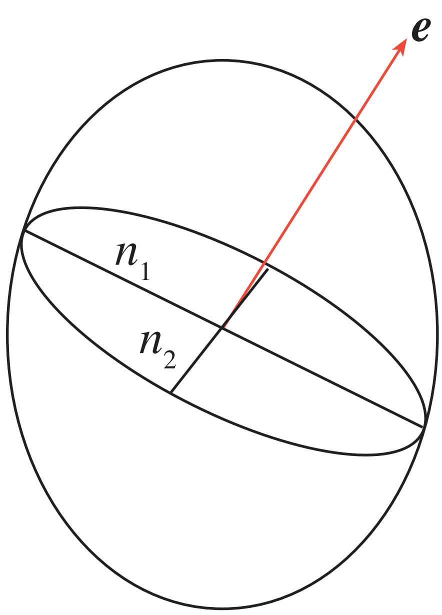


図 17　屈折率楕円体

で定義される面を屈折率楕円体 (index ellipsoid，または，indecatrix) という。これは，主軸の長さが主屈折率に等しい楕円体を表す。また物理的には，電束密度 $\boldsymbol{D}$ に対する等エネルギー面と解釈できる。

屈折率楕円体を用いると，固有偏光と固有屈折率を次のように幾何学的に求めることができる。波面法線 $\boldsymbol{e}$ が与えられたとする。図 17 のように，原点を通り $\boldsymbol{e}$ に垂直な面，すなわち，波面で屈折率楕円体を切る。切断面は楕円になる。楕円の長軸，短軸の方向が，固有偏光の $\boldsymbol{D}$ の方向に一致し，長軸半径，短軸半径が対応する固有偏光の固有屈折率に等しくなる。